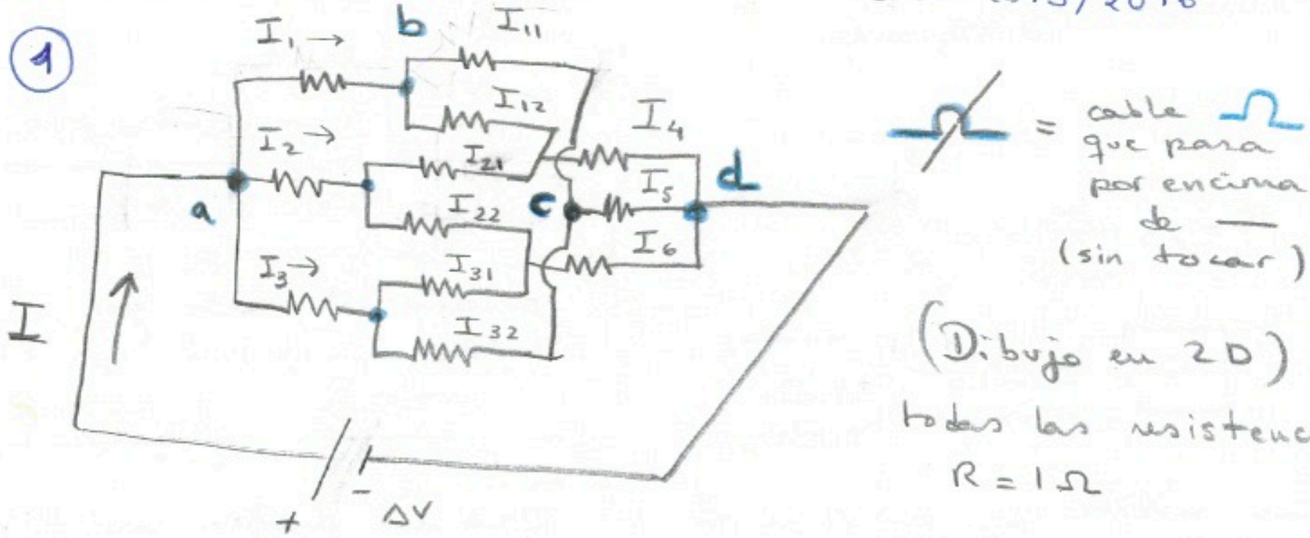
Soluciones a los problemas del tema 4

Elena del Valle Reboul
curso 2015/2016

(1)



(Dibujo en 2D)
todas las resistencias $R = 1\Omega$

- La corriente que genera la batería ΔV, I, se divide en 3 en el nodo a:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 3 I_1 \text{ (todas iguales por simetría)}$$

- Igualmente, en el nodo d, recuperamos 3 corrientes iguales:

$$I = I_4 + I_5 + I_6 = 3 I_1$$

- En los nodos intermedios, la corriente se desdobla en 2:

nodo b: $I_1 = I_{11} + I_{12} = 2 I_{11}$ (idem con I_{21}, I_{22}, I_{31}, I_{33})

nodo c: $I_5 = I_{11} + I_{32} = 2 I_{11}$ (idem con I_4, I_6)

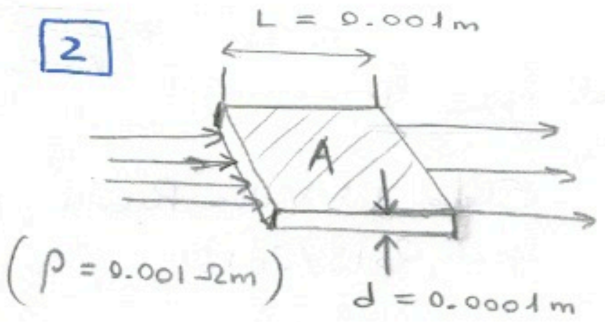
- Aplicamos las leyes de Kirchhoff a la malla a-b-c-d:

$\Delta V = I \cdot R_{eq}$.

$$\Delta V - \underset{I/3}{\underset{\downarrow}{I_1}} R - \underset{I_1/2 = \frac{I}{6}}{\underset{\downarrow}{I_{11}}} R - \underset{I/3}{\underset{\searrow}{I_5}} R = 0 \Rightarrow \Delta V = R I \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)}_{5/6}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{eq} = \frac{5}{6} R = \frac{5}{6} \Omega}$$

2



• Lo tratamos como un hilo conductor donde:

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad \begin{cases} \rho = 0.001\ \Omega m \\ l = L \\ A = \text{sección} = d \cdot L \end{cases}$$

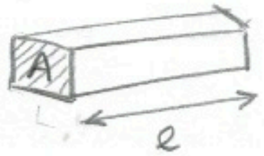
¡cuidado! no es el área del cuadrado sino la sección del cable por donde atraviesa la corriente

$$\Longrightarrow R = \rho \frac{\cancel{L}}{\cancel{L} \cdot d} = \frac{\rho}{d}$$

$$\boxed{R = \frac{0.001}{0.0001} = 10\ \Omega}$$

• La resistencia <u>no</u> depende del área del cuadrado.
• Ni siquiera depende de la longitud del lado, solo del espesor (esto por ser un cuadrado).

3



$$A = (0.002\ m)^2$$
$$t = 3 \times 10^{-6}\ s$$
$$n_e = 4.32 \times 10^{14}\ \text{electrones}$$
$$v_e = 2 \times 10^{-4}\ m/s$$

• La longitud recorrida por los electrones en ese tiempo t es:

$$l = v_e \cdot t$$

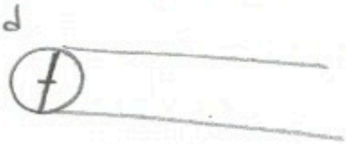
• La densidad de electrones es el nº de electrones que pasan por el cable entre el volumen que ocupan:

$$\sigma_e = \frac{n_e}{V} = \frac{n_e}{A \cdot l} = \frac{n_e}{A \cdot v_e t} = \frac{4.32 \times 10^{14}}{4 \times 10^{-6} \cdot 2 \times 10^{-4} \cdot 3 \times 10^{-6}}$$

$$\boxed{\sigma_e = 1.8 \times 10^{29}\ \text{electrones}/m^3} \Longrightarrow \text{Aluminio!}$$

4 $I_{max} = 1\,A$

$$j_{max} = 500\,A\,\frac{1}{\cancel{cm^2}}\,\frac{10^4\,\cancel{cm^2}}{1\,m^2} = 5\times10^6\,A/m^2$$



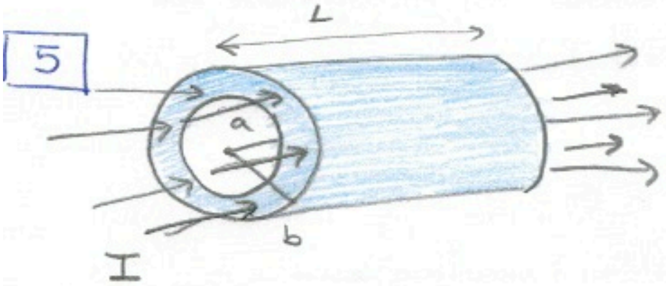
Área de la sección:

$$A = \pi\left(d/2\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

Queremos: $I \leq I_{max} = j_{max}\cdot A = j_{max}\cdot\frac{\pi d^2}{4}$

$$\Longrightarrow \boxed{d} = \sqrt{\frac{4}{\pi}\,\frac{I_{max}}{j_{max}}} = \sqrt{\frac{4}{\pi}\,\frac{1}{5\times10^6}}\ \boxed{= 5\times10^{-4}\,m = 0.5\,mm}$$

5



$\rho_{Al} = 2.65\times10^{-8}\,\Omega m$

$$\begin{cases} a = 0.001\,m \\ b = 0.01\,m \\ L = 0.01\,m \end{cases}$$

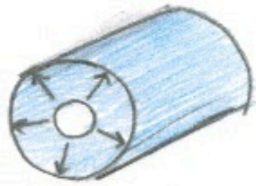
1) La corriente I fluye a lo largo del cilindro:
El área de la sección por la que fluye I es la misma en todo L
$\Longrightarrow$ usamos la fórmula sencilla:

$$\boxed{R} = \rho\frac{L}{A} = 2.65\times10^{-8}\,\frac{0.01}{\pi\,(0.01^2 - 0.001^2)} = \boxed{8.5\times10^{-7}\,\Omega}$$

sección conductora:

$A = \pi\,(b^2 - a^2)$

2)

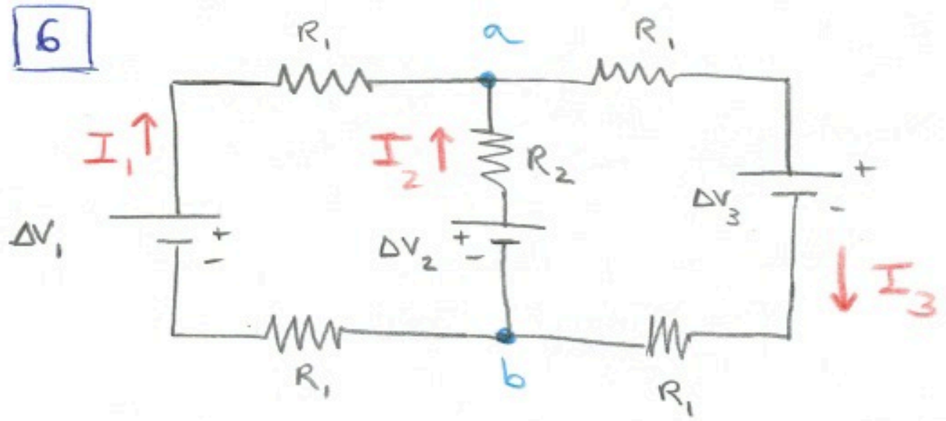


El área por el que fluye I va cambiando según el radio, tenemos de integrar!

Si b−a fuera muy fino, un diferencial de longitud dr, tendríamos:

$$dR = \rho\,\frac{dr}{\underbrace{2\pi r\times L}_{\text{área a través la cual fluye I}}} \Longrightarrow \boxed{R = \frac{\rho}{2\pi L}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi L}\,\mathrm{Ln}\,\frac{b}{a} = 9.7\times10^{-7}\,\Omega}$$

$\boxed{6}$



1) Nombramos elementos del circuito y nodos (a,b)

2) Nombramos las corrientes asignando direcciones arbitrariamente.

3) 1ª regla de Kirchhoff : escribimos las ecuaciones de cada nodo, la suma de las intensidades de corriente en un nodo es nula

$a: \quad I_1 + I_2 - I_3 = 0$

$b: \quad I_3 - I_2 - I_1 = 0$ → esta ecuación es redundante ⇒ no necesaria

4) 2ª regla de Kirchhoff para las mallas, la suma de caídas de potencial en una malla es nula

izqda :

$$\Delta V_1 - I_1 R_1 + I_2 R_2 - \Delta V_2 - R_1 I_1 = 0 \quad (\circlearrowright)$$

dcha :

$$\Delta V_2 - I_2 R_2 - I_3 R_1 - \Delta V_3 - I_3 R_1 = 0 \quad (\circlearrowright)$$

5) Resolvemos las 3 ecuaciones independientes obtenidas, con 3 incógnitas I_1, I_2, I_3:

→ de la primera obtenemos $I_3 = I_1 + I_2$ para substituir en las otras dos:

$$\begin{cases} I_1 2R_1 - I_2 R_2 = \Delta V_1 - \Delta V_2 & (1) \\ I_2 (R_2 + 2R_1) + 2R_1 I_1 = \Delta V_2 - \Delta V_3 & (2) \end{cases}$$

Despejamos I_1 en ①, substituimos en ②

① $$I_1 = \frac{\Delta V_1 - \Delta V_2}{2R_1} + \frac{R_2}{2R_1} I_2$$

②

$$I_2 (R_2 + 2R_1) + \Delta V_1 - \Delta V_2 + R_2 I_2 = \Delta V_2 - \Delta V_3$$

$$\boxed{I_2} = \frac{2\Delta V_2 - \Delta V_3 - \Delta V_1}{2(R_2 + R_1)} = \frac{2 \cdot 4 - 4 - 2}{2(1+2)} = \boxed{\frac{1}{3} A}$$

volvemos a ①: $$\boxed{I_1} = \frac{2-4}{2 \cdot 1} + \frac{2}{2 \cdot 1} \frac{1}{3} = -1 + \frac{1}{3} = \boxed{-\frac{2}{3} A}$$

su sentido de circulación es contrario al que habíamos asumido.

y finalmente: $$\boxed{I_3} = I_1 + I_2 = \frac{1}{3} + \frac{-2}{3} = \boxed{\frac{-1}{3} A}$$

- La diferencia de potencial entre A y B:

$$\boxed{\Delta V_{AB}} = I_2 R_2 + \Delta V_2 = \frac{1}{3} \cdot 2 - 4 = \boxed{\frac{-10}{3} V}$$