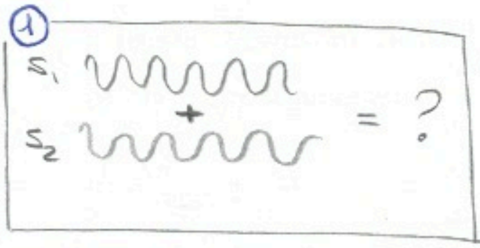
Solución a los problemas del tema 2

Elena del Valle Reboul
curso 2015-2016

1



- Dos ondas que difieren poco en frecuencia:

$$\begin{cases} \Delta k = k_1 - k_2 \ll k_1, k_2 \\ \Delta w = w_1 - w_2 \ll w_1, w_2 \end{cases}$$

- Su interferencia es su suma:

$$S_1 + S_2 = S_0 \sin(k_1 x - w_1 t) + S_0 \sin(k_2 x - w_2 t)$$

- Usamos: $\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$$S_1 + S_2 = 2S_0 \cos\left(\frac{\Delta k x - \Delta w t}{2}\right) \cdot \cos\left(\underbrace{\frac{k_1+k_2}{2}}_{\approx k_1} x - \underbrace{\frac{w_1+w_2}{2}}_{\approx w_1} t\right)$$

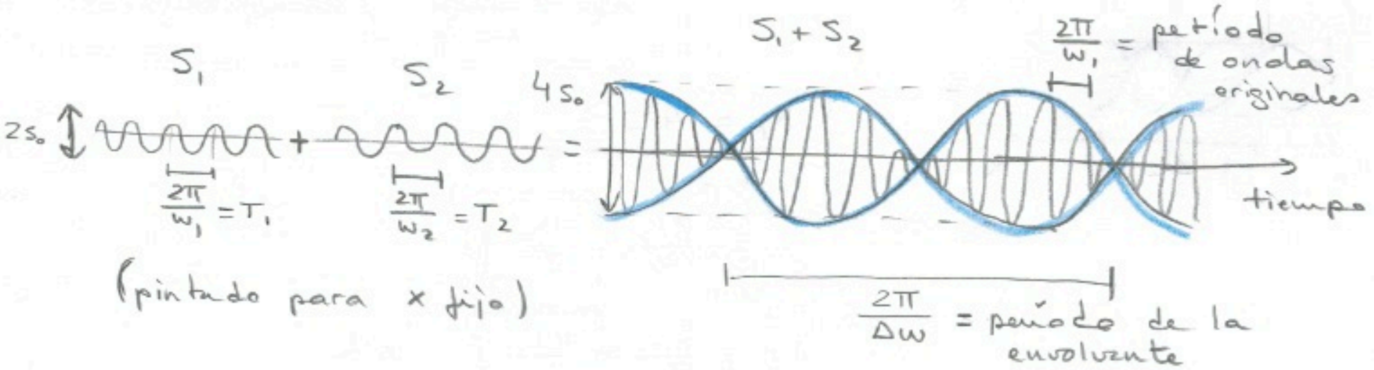
Como $k_1 \sim k_2$ y $w_1 \sim w_2 \rightarrow$ (aproximación)

$$S_1 + S_2 = 2S_0 \cos\left(\frac{\Delta k x - \Delta w t}{2}\right) \cos(k_1 x - w_1 t)$$

¿Cómo es esta nueva onda superposición?

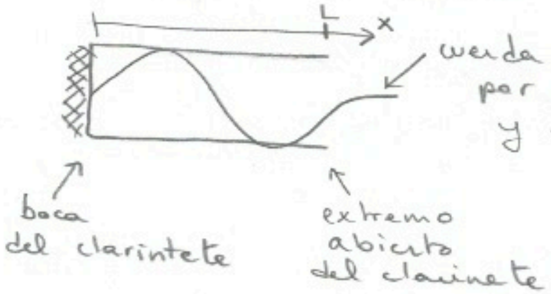
Hay una oscilación similar a las ondas originales, pero con el doble de amplitud $2 \rightarrow 2s_0 \cos(k_1 x - w_1 t)$

Multiplicada por otra onda de frecuencia mucho menor, mucho más lenta. Esta genera una "envolvente" que modula la onda anterior:



(pintado para x fijo)

(2) Aunque en el clarinete lo que vibra son ondas longitudinales de presión en el aire, podemos obtener los modos naturales de igual manera que hicimos en clase para la guitarra, con la vibración de una cuerda, pero ahora fija solo en un extremo:



• Buscamos las posibles ondas estacionarias sumando una onda y la misma reflejada viajando en sentido opuesto:

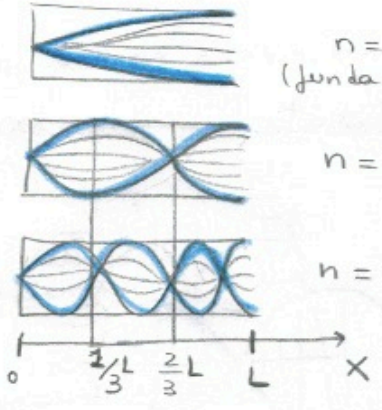
$$\left.\begin{array}{l} S_1 = A\sin(kx-wt) \\ S_2 = A\sin(kx+wt) \end{array}\right\} \quad S_1+S_2 = \underbrace{2A\sin kx}_{S(x)}\cos wt$$

$S(x) = 2A\sin kx$ = amplitud que depende de la posición pero la onda ya no viaja.

• Ahora consideramos las condiciones de contorno:

las ondas deben tener $\begin{cases} x=0 & \text{nodo} \\ x=L & \text{vientre} \end{cases}$ Los vientres se encuentran en $x_m = (m+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$; $m=0,1\ldots$

• Visualmente, los modos naturales son:



$$\Rightarrow \underbrace{x_m = L}_{\text{vientre}} = (m+\tfrac{1}{2})\frac{\lambda_m}{2}$$

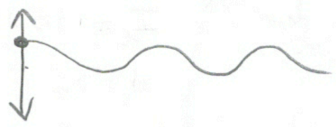
$$\boxed{\lambda_m = \frac{2L}{m+\frac{1}{2}}} = \text{modos propios}$$

$$\boxed{\underset{m=0}{\lambda_1} = 4L}$$

$$\underset{m=1}{\lambda_2} = \frac{2L}{3/2} = \boxed{\frac{4L}{3}}$$

$$\lambda_3 = \frac{2L}{5/2} = \boxed{\frac{4L}{5}} \quad \text{etc...}$$

3 extremo: m.a.s. $\begin{cases} A = 0.05\,m \\ f = 50\,s^{-1} \\ v = 200\,m/s \end{cases}$

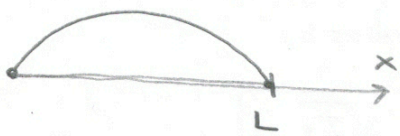


Si el extremo sigue un m.a.s., se está generando una onda que viaja por la cuerda, de igual amplitud y frecuencia:

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \quad \begin{cases} A = 0.05\,m \\ \omega = 2\pi \cdot f = 100\pi\ Hz \\ k = \dfrac{\omega}{v} = \dfrac{100\pi}{200} = \dfrac{\pi}{2}\ m^{-1} \end{cases}$$

4 $f_{La} = 440\,Hz$ (armónico fundamental), pero ahora $\begin{cases} \text{la ha afinado en } f_{Pablo} = 436\,Hz \\ \text{con una tensión } T_{Pablo} = T \end{cases}$

- Un violín se compone de cuerdas fijas por los dos extremos. Su modo fundamental es $\lambda_1 = 2L$, que corresponde a



una frecuencia $f_1 = \dfrac{v}{\lambda_1} = \dfrac{v}{2L}$.

- En una cuerda la relación entre la velocidad de las ondas y la tensión aplicada es: $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ con μ = densidad lineal

$$\Rightarrow f_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\,\frac{1}{2L}$$ (μ y L son propiedades de la cuerda)

- Queremos que con una nueva tensión T_{La} el modo fundamental coincida con el La:

$$f_1 = f_{La} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_{La}}{\mu}}$$

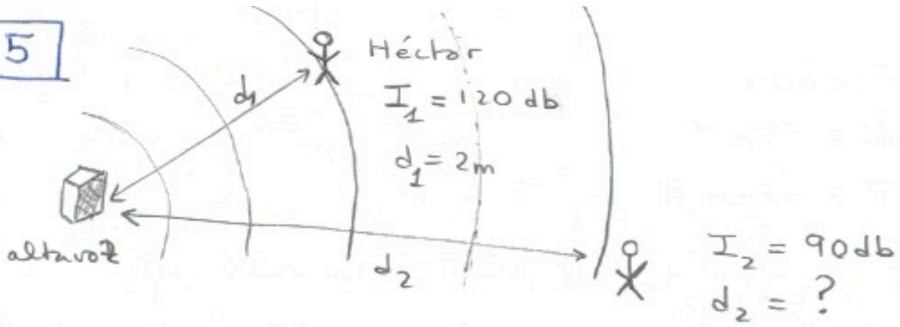
- Aunque ahora mismo, la situación es $f_{Pablo} = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T_{Pablo}}{\mu}}$

- Dividimos las dos ecuaciones para despejar T_{La}:

$$\frac{f_{La}}{f_{Pablo}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2L}}\sqrt{\frac{T_{La}}{\cancel{\mu}}}}{\cancel{\frac{1}{2L}}\sqrt{\frac{T_{Pablo}}{\cancel{\mu}}}} = \sqrt{\frac{T_{La}}{T_{Pablo}}} \Rightarrow T_{La} = T_{Pablo}\left(\frac{f_{La}}{f_{Pablo}}\right)^2$$

Debe incrementar T en 2% $\Rightarrow \boxed{T_{La} = 1.02\,T}$

$\boxed{5}$



• El altavoz produce ondas en 3d esféricas, a una potencia P dada. La intensidad desde el foco de la onda decae como la superficie de la esfera que forma el frente de ondas:

$$I = P/_{4\pi r^2} \longrightarrow \text{se cumple en } d_1 \text{ y en } d_2:$$

$$I_1 = \frac{P}{4\pi d_1^2}, \quad I_2 = \frac{P}{4\pi d_2^2}$$

• Dividimos las ecuaciones para despejar d_2, ò despejamos P en ambas ecuaciones e igualamos resultados:

2 maneras

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\cancel{P}/\cancel{4\pi}d_1^2}{\cancel{P}/\cancel{4\pi}d_2^2} = \frac{d_2^2}{d_1^2} \longrightarrow \boxed{d_2 = d_1\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}}$$

$$P = I_1 \cancel{4\pi} d_1^2 = I_2 \cancel{4\pi} d_2^2$$

• Para obtener d_2 tenemos que poner I_1, I_2 en el sistema internacional:

$$I\,(\text{en db}) = 10\log_{10}(I/I_0) \longrightarrow I = I_0 \exp_{10}\left(\frac{I\,(\text{en db})}{10}\right)$$

$$I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$$

• $I_1 = 1\ W/m^2$
$I_2 = 0.001\ W/m^2$

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = 1\ W/m^2 \\ I_2 = 0.001\ W/m^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{d_2} = 2\sqrt{\frac{1}{0.001}} = \boxed{63,24\,m}$$

$\boxed{6}$ $y(x,t) = (0.2\,m)\sin(3\pi x)\cos(40\pi t)$ onda estacionaria entre $x_1 = 0$ y $x_2 = 1.5\,m$

• Comparamos con la expresión general para obtenener sus propiedades: $y(x,t) = 2A\sin kx \cos wt$

A = amplitud $= 0.1\,m$

$K = 3\pi\ m^{-1} = \frac{2\pi}{\lambda} \longrightarrow \lambda = \frac{2}{3}\ m^{-1} = 0.667\,m^{-1}$

$w = 40\pi\ s^{-1} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \longrightarrow T = 0.05\ s^{-1}\ ,\ f = 20\,s^{-1}$

• Encontramos las condiciones de contorno: $2A\sin kx = S(x)$

en $x_1 = 0 \longrightarrow S(0) = 0$ un <u>nodo</u> en $x = 0$
$\Rightarrow$ el extremo está <u>fijo</u>

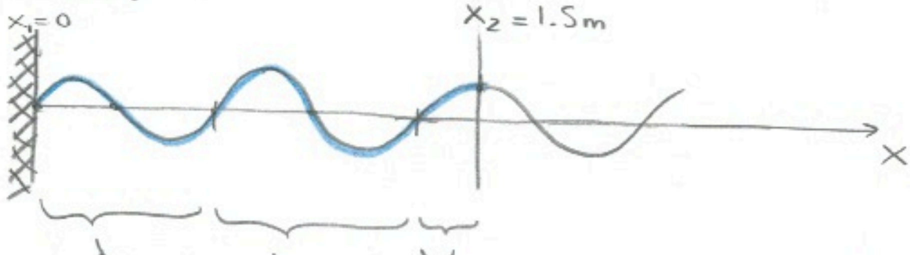
en $x_2 = 1.5 \longrightarrow S(1.5) = \underbrace{\sin(3\pi \times 1.5)}_{=1} \times 0.2\,m = 0.2 = 2A$

este es el máximo de la onda estacionaria
$\Rightarrow$ este extremo es un <u>vientre</u>
y por lo tanto está <u>suelto</u>

• ¿Cuántos nodos y vientres?
$\Rightarrow$ ¿cuántas longitudes de onda caben en $1.5\,m$?

$\frac{L}{\lambda} = \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = \frac{1.5}{2/3} = \frac{3/2}{2/3} = \frac{3.3}{2.2} = \frac{9}{4} = 2.25 = 2 \text{ y } 1/4$ de longitud de onda

• Lo pintamos:



Caben 5 nodos y 5 vientres.

• La longitud fundamental $\boxed{\lambda_1 = 4L = 6m}$ Lo sabemos por el problema (2)

$\boxed{7}$

tercer armónico

$L = 0.75\,m$

$m = 0.00875\,kg$

$v_{aire} = 344\,m/s$

$\lambda_{aire} = 0.765\,m$

Tension ?

• En una cuerda : $v_{cuerda} = \sqrt{\dfrac{T_{cuerda}}{\mu}} \Longrightarrow T_{cuerda} = \mu\, v_{cuerda}^2$

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0.00875}{0.75} = 0.0117\ kg/m = \text{densidad}$$

$$v_{cuerda} \underset{\substack{\uparrow \\ 3^{er}\ \text{armónico}}}{=} \lambda_3 f_3 = \ ?$$

• El tercer armónico corresponde a $\lambda_3 = \dfrac{2L}{3} = 0.5\,m$

• La frecuencia debe ser la misma que queremos obtener en el aire ya que la frecuencia de la onda que se propaga por la habitación es la misma que la del objeto vibrante que la crea:

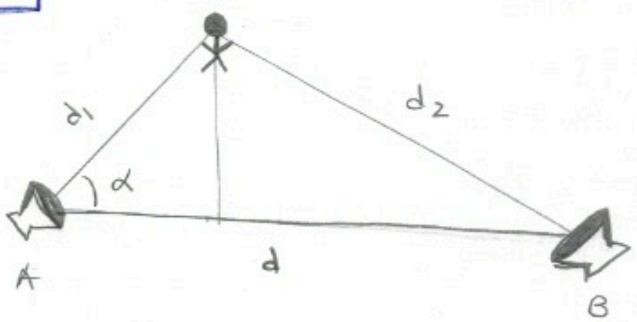
$$f_3 = f_{aire} = \frac{v_{aire}}{\lambda_{aire}} = \frac{344}{0.765} = 449.67\ s^{-1}$$

$\Longrightarrow$

$$T_{cuerda} = \mu \left(\frac{2L}{3} \frac{v_{aire}}{\lambda_{aire}} \right)^2 = 0.0117 \left(0.5 \times 449.67 \right)^2$$

$$\boxed{T_{cuerda} = 589.77\ N}$$

8



$f_A = f_B = 68{,}6\ Hz$

$d_1 = 1\ m$

$\alpha = 60^\circ$

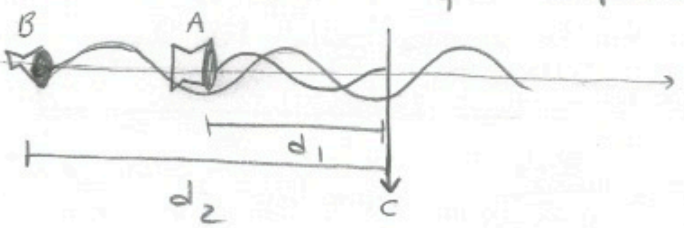
$v_s = 343\ m/s$

- Distancia mínima, $d \Rightarrow$ para que en C no se oiga nada significa que en C hay un nodo de la interferencia de las ondas generadas por A y B (su suma).

Al querer la distancia mínima, debe ser el primer nodo, es decir, la situación:

$$S(d_1, t) + S(d_2, t) = 0$$

- Como están en fase, es igual que si sumaramos dos ondas propagándose en la misma dirección, con igual frecuencia (en lo que respecta al punto C solo !!):



$$S_1(x,t) + S_2(x,t) = A \sin(Kd_1 - wt) + A\sin(Kd_2 - wt)$$

$$= 2A \sin\left(\frac{K(d_1+d_2) - 2wt}{2}\right) \cos\left(\frac{K(d_1 - d_2)}{2}\right)$$

usamos

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

- Queremos que esta suma sea nula para todo t:

$$\Rightarrow \cos\frac{K(d_1-d_2)}{2} = 0 \Rightarrow \frac{K}{2}|d_1-d_2| = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \dots = \frac{\pi}{2} n$$

$n = 1, 3, 5 \dots$

$$K = 2\pi/\lambda \Rightarrow \boxed{|d_1 - d_2|} = \frac{\cancel{2}}{2\cancel{\pi}} \lambda \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}} n = \boxed{\frac{\lambda}{2} n}$$

Condición de nodo en el punto C

- Queremos el primer nodo : $n = 1$

$$|d_1 - d_2| = \frac{\lambda}{2} \begin{cases} d_2 = \frac{\lambda}{2} + d_1 \\ d_2 = d_1 - \frac{\lambda}{2} \end{cases} \quad \boxed{d_2 = d_1 \pm \frac{\lambda}{2}}$$

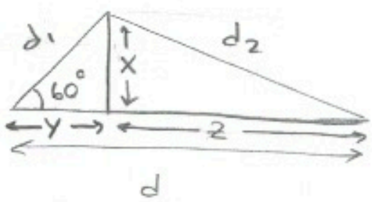
$$\lambda = v/f \longrightarrow d_2 = \underbrace{d_1}_{1\,m} \pm \underbrace{\frac{v}{2f}}_{2.5} \Longrightarrow$$

Solo puede ser la solución

$$d_2 = d_1 + \frac{v}{2f} = 3.5\,m$$

(la otra es negativa, no física $\Rightarrow$ descartada)

- Obtenemos d, a partir de d_1, d_2:



$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{y}{d_1} \Longrightarrow y = \frac{d_1}{2} = 0.5\,m$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{d_1} \Longrightarrow x = \frac{d_1\sqrt{3}}{2} = 0.866\,m$$

$$z^2 + x^2 = d_2^2 \Longrightarrow z = \sqrt{d_2^2 - x^2} = \sqrt{3.5^2 - 0.866^2} = 3.39\,m$$

$$\boxed{d} = y + z = 0.5 + 3.39 = \boxed{3.89\,m}$$