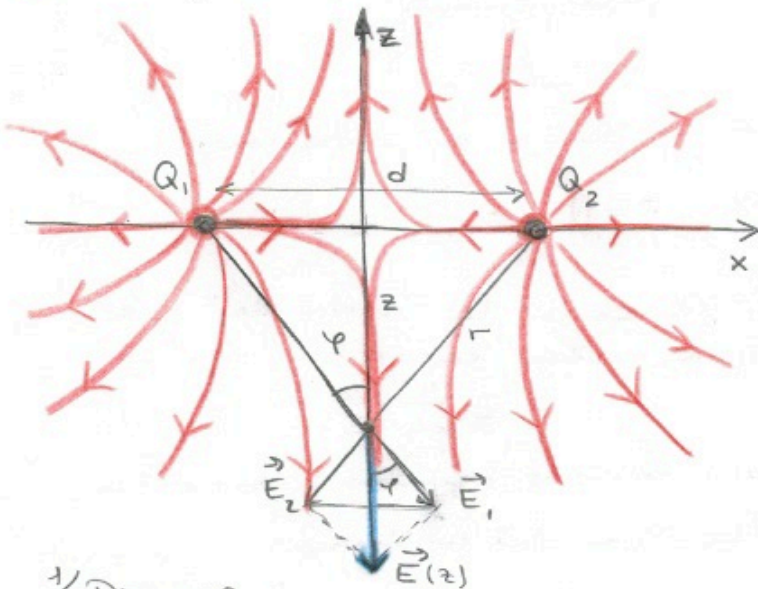


Soluciones a los problemas del tema 3

Elena del Valle Reboul
Curso 2015-2016

① Dibujamos el sistema y las líneas de campo:



$$Q_1 = Q_2 = Q$$

Cada carga crea un campo $\vec{E}_1, \vec{E}_2,$

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 ?$$

Dibujamos la suma vectorial de los campos para obtener toda la información posible por simetría.

1) Dirección

¿sentido del campo sobre el eje z?

Como las cargas son iguales, los campos que crean \vec{E}_1, \vec{E}_2 siempre suman un campo total $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ que está sobre el eje z.

El sentido es hacia $\begin{cases} \text{arriba } (+\vec{k}) \text{ cuando } z > 0 \\ \text{abajo } (-\vec{k}) \text{ cuando } z < 0 \end{cases}$

2) El módulo es la suma de las proyecciones de \vec{E}_1 y \vec{E}_2 sobre el eje z: $E_1^z = E_2^z = |\vec{E}|/2$

$$|\vec{E}| = 2 E_1 \cos \varphi = 2 k \frac{Q}{r^2} \cos \varphi = 2kQ \frac{z}{(z^2 + (d/2)^2)^{3/2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{E_1^z}{E_1} \quad E_1 = k \frac{Q}{r^2} \quad \begin{cases} \cos \varphi = \frac{z}{r} \\ r = \sqrt{z^2 + (d/2)^2} \end{cases}$$

3) $|\vec{E}(z)| = 0$ en $z = 0$, justo entre las dos cargas

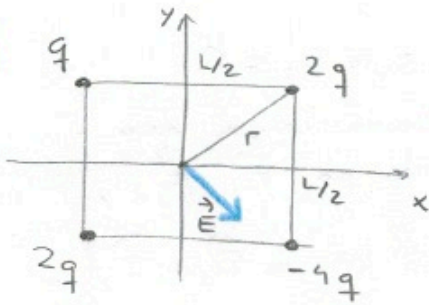
El punto de equilibrio es inestable respecto al eje z porque el campo apunta hacia fuera al desplazarnos un poco. Pero es estable en el eje x, donde el campo apunta $\rightarrow \leftarrow$

4) El campo es máximo donde se anule la derivada:

$$\frac{d|\vec{E}(z)|}{dz} = \dots = \frac{8(d^2 - 8z^2)}{(d^2 + 4z^2)^{5/2}} 2kQ = 0$$

$$\Rightarrow 8z^2 = d^2 \Rightarrow \boxed{z = \pm \frac{d}{2\sqrt{2}}}$$

②



• La distancia a cada carga

$$\text{es } r = \sqrt{2\left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

• El campo es la suma del que crea cada carga:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^4 \vec{E}_i$$

• Pero las cargas $2q$ crean campos iguales y opuestos, que se anulan, en el centro del cuadrado.

• Solo hay que sumar los campos de las otras dos esquinas:

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_{-4q}$$

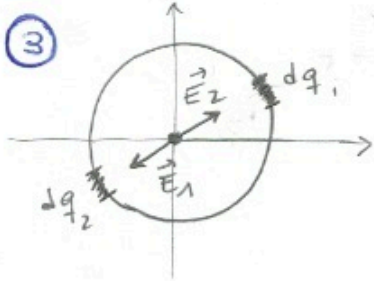
→ su dirección es en la línea que une las dos esquinas

→ el sentido es hacia la carga ($-4q$)

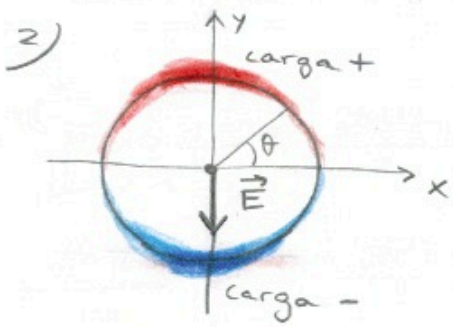
• El módulo es la suma, ya que tienen el mismo sentido:

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_q| + |\vec{E}_{-4q}| = kq \left(\frac{1}{r^2} + \frac{4}{r^2} \right) = kq \frac{5}{L^2} \times 2$$

$$\boxed{|\vec{E}| = \frac{10kq}{L^2}}$$



1) Cuando $\sigma = \sigma_0 = cte (> 0)$
 por simetría $\vec{E} = 0$
 Cada diferencial de longitud en el arco tiene un diferencial en el lado opuesto que compensa exactamente el campo que crea.

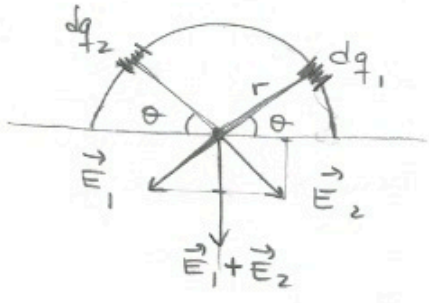


$$\sigma = \sigma_0 \sin \theta$$

$\rightarrow \sigma = 0$ en $\theta = 0, \pi$
 $\rightarrow \sigma = \sigma_0$ en $\theta = +\pi/2$
 $\rightarrow \sigma = -\sigma_0$ en $\theta = -\pi/2 \text{ ó } \frac{3\pi}{2}$

Lo pintamos para encontrar las simetrías:

- El campo total estará dirigido hacia $-\hat{j}$ porque cada diferencial de longitud (o carga) tiene un análogo al otro lado del eje y (que es eje de simetría) que crea un campo de igual módulo como en el dibujo:



- Esto sucede con el semicírculo superior y con el inferior, en igual magnitud, dirección y sentido \Rightarrow podemos calcular el campo creado por el semicírculo superior y multiplicarlo $\times 2$.

$$\vec{E} = \int_{sup} d\vec{E}_{aro+} + \int_{inf} d\vec{E}_{aro-} = 2 \int_{sup} d\vec{E}_{aro+}$$

- Integramos el campo total que crean todos los diferenciales de carga en la parte superior del arco:

$$|\vec{E}| = 2 \int_{aro\ sup} k \frac{dq}{r^2} \sin \theta = 2 \int_{aro\ sup} k \frac{\sigma_0 \sin \theta \cdot dl}{r^2} \sin \theta$$

Componente sobre el eje y

$$dq = \sigma_0 \sin \theta \cdot dl$$

• Obtenemos $dl = |d\vec{r}|$ en un arco

$$\vec{r} = r (\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j})$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} d\theta = r (-\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}) d\theta$$

$$|d\vec{r}| = r d\theta \rightarrow \boxed{dl = r d\theta}, \quad r = \text{cte en este caso}$$

• $|\vec{E}| = \frac{2 \times 2 \kappa \sigma_0}{r} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{4 \kappa \sigma_0}{2r} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{\pi/2}$

↓
integrarnos en el primer cuarto del arco y multiplicamos x 2

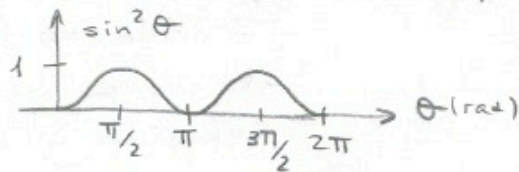
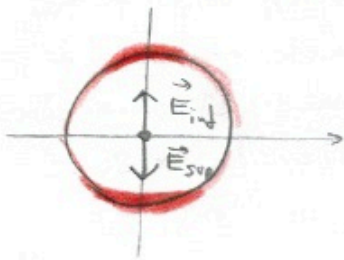
$$= \frac{2 \kappa \sigma_0}{r} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\kappa \pi \sigma_0}{r}$$

usamos

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\theta)]$$

$$\boxed{|\vec{E}| = \frac{\kappa \pi \sigma_0}{r}}$$

3/ $\sigma = \sigma_0 \sin^2 \theta$, ahora la carga es siempre positiva

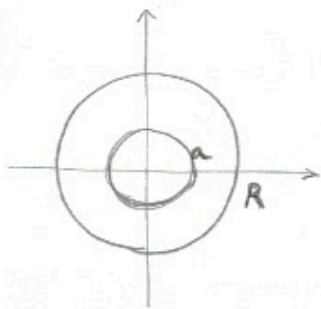


$$\begin{cases} \sigma = 0 & \text{en } \theta = 0, \pi \\ \sigma = \sigma & \text{en } \theta = \pm \frac{\pi}{2}, \text{ máxima} \end{cases}$$

La mitad del arco superior y el inferior crean un campo de igual módulo y dirección (sobre el eje y también) pero de opuesto sentido. \Rightarrow Se cancelan exactamente en el punto central!

$$\boxed{\vec{E} = 0} \text{ por simetría } (\vec{E}_{\text{sup}} = -\vec{E}_{\text{inf}})$$

4



$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{a}\right), \quad \rho_0 < 0$$

Consideramos primero el caso

$$\boxed{a < R}$$

- Calculamos el campo \vec{E} en todas las zonas del espacio usando la ley de Gauss con una esfera virtual de Gauss. Por simetría, el campo \vec{E} siempre tiene dirección radial. Calculamos el módulo: ($\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA$)

$$\phi = \oint_{\text{esfera}} E dA = E \underbrace{\oint dA}_{\substack{\text{área} \\ \text{de la} \\ \text{superficie} \\ \text{de la esfera} \\ \text{de radio "d"}}} = \underbrace{4\pi d^2}_{\text{Gauss}} = 4\pi \kappa \underbrace{Q_T(d)}_T$$

$E = \frac{d\phi}{dA}$ en la superficie de la esfera

$$E = \kappa \frac{Q_T(d)}{d^2} \quad \text{con } Q_T(d) = \text{la carga total dentro de la esfera virtual de radio } d$$

- Para cada zona del espacio hay que calcular la carga total:
 - ① $d < R$
 - ② $d > R$

$$1) \boxed{d < R} \quad E_1 = \kappa \frac{1}{d^2} \underbrace{\int_0^d \rho(r) 4\pi r^2 dr}_{Q_T(d)} = \frac{\kappa}{d^2} 4\pi \rho_0 \int_0^d r^2 \left(1 - \frac{r}{a}\right) dr$$

$$\boxed{E_1} = \frac{\kappa 4\pi \rho_0}{d^2} \left(\frac{d^3}{3} - \frac{d^4}{4a} \right) = \frac{4\pi \kappa \rho_0}{3} d \left(1 - \frac{3d}{4a} \right)$$

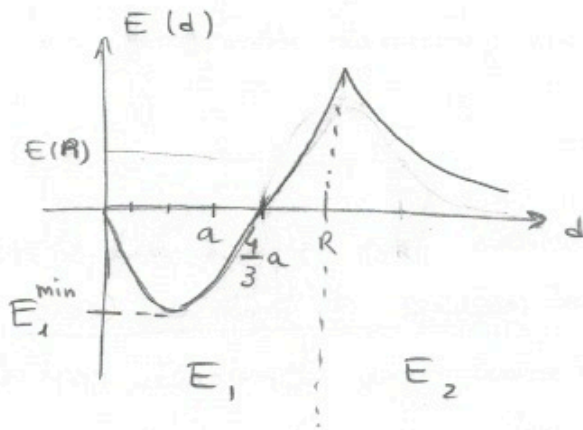
Se anula en $\begin{cases} d = 0 \\ d = \frac{4}{3} a \end{cases}$

$$2) \boxed{d > R}$$

$$\boxed{E_2} = \kappa \frac{1}{d^2} \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi \rho_0 \kappa}{3 d^2} R^3 \left(1 - \frac{3R}{4a} \right)$$

Se anula en $d \rightarrow \infty$

- Pintamos cualitativamente el campo: (con $\rho_0 < 0$)



$$E_1(0) = 0$$

$$E_1\left(\frac{4}{3}a\right) = 0$$

$$E_1(R) = E_2(R) = \frac{4\pi k \rho_0 R}{3} \left(1 - \frac{3R}{4a}\right)$$

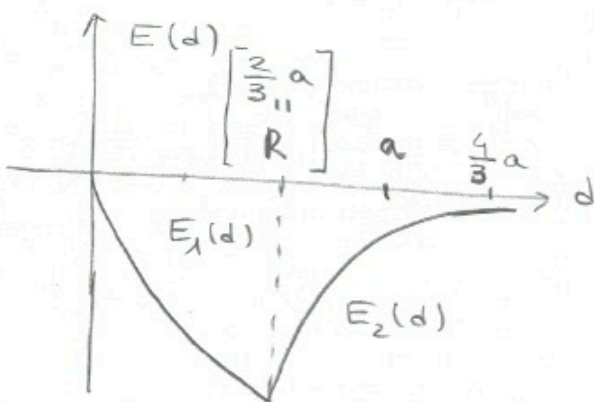
$$\Delta > 0 \text{ si } R > \frac{4}{3}a$$

- Para que E_1 crezca de la superficie (R) al centro, necesitamos $E_1(R) = E_1^{\min}$, es decir, que el mínimo suceda en $d = R$, para que $E_1(d)$ sea una función siempre decreciente (creciente hacia el centro de la esfera). Obtenemos E_1^{\min} y su posición d_{\min} :

$$\left. \frac{\partial E}{\partial d} \right|_{d_{\min}} = \frac{4\pi k \rho_0}{3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{d}{a}\right) \Big|_{d_{\min}} = 0 \Rightarrow d_{\min} = \frac{2}{3}a$$

La condición es, por tanto, $R = d_{\min} = \frac{2}{3}a$

- Entonces, la gráfica cambia a:



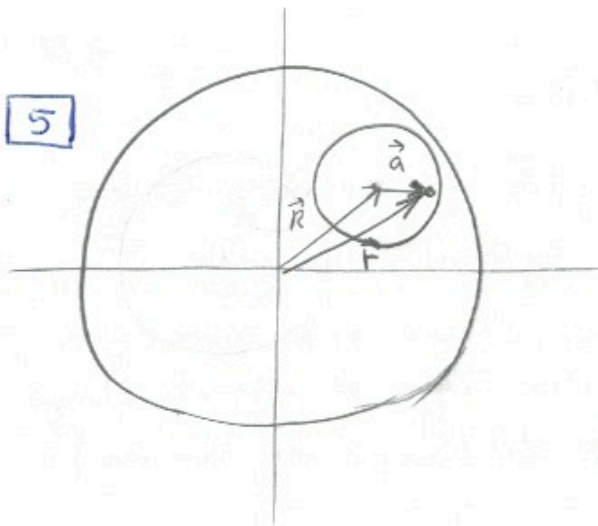
hemos obtenido

$$a = \frac{3}{2}R > R$$

contrariamente a lo asumido al principio pero no cambia nada de la anterior derivación.

$E(d)$ es siempre negativo.

5



- Si no hubiera cavidad, el campo a una distancia r de centro sería: \vec{E}_1

(Gauss, como en clase)

$$\phi = 4\pi K Q_T = \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = E_1(r) \underbrace{4\pi r^2}_{\text{Área cerrada}}$$

$$Q_T = \underbrace{4\pi r^3}_{\text{volumen de la esfera}} \rho$$

$$\Rightarrow E_1(r) = \frac{4\pi\rho}{3} r, \text{ con dirección radial}$$

$$\vec{E}_1(r) = \frac{4\pi\rho}{3} \vec{r}$$

- Si solo existiese la cavidad, pero rellena con la misma densidad ρ , el campo a una distancia \vec{a} del centro de la cavidad sería, igualmente:

$$E_2 = \frac{4}{3}\pi\rho \vec{a}$$



- Como este relleno es justo el que falta al tener una cavidad, el campo total dentro de ella es la resta:

$$\vec{E}_{\text{cavidad}} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{4\pi\rho}{3} (\vec{r} - \vec{a})$$

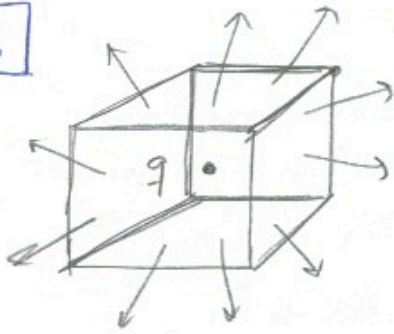
- Notamos viendo el dibujo la relación entre los 3

vectores: $\vec{R} + \vec{a} = \vec{r} \Rightarrow \vec{r} - \vec{a} = \vec{R}$ = vector entre los centros de las esferas

$$\vec{E}_{\text{cavidad}} = \frac{4\pi\rho}{3} \vec{R}$$

Es un campo constante! (siempre en la misma dirección $\sim \vec{R}$)

16



1) El flujo total =

p 3.8

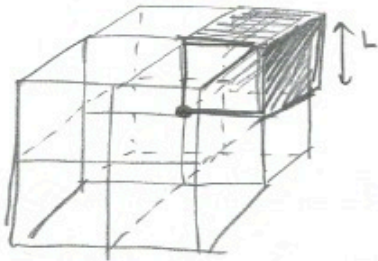
$$\phi_{\text{TOT wbo}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi\kappa Q = 4\pi\kappa q$$

Ley Gauss
este caso

Por simetría, vemos que cada una de las 6 caras tiene el mismo flujo (o intensidad de líneas de campo).

$$\Rightarrow \phi_{\text{cara}} = \phi_{\text{TOT}} / 6 = \frac{4\pi\kappa q}{6} = \frac{q}{6\epsilon_0}$$

2) Si está en el vértice: imaginamos otros 7 wbos



que rodean la carga, en total 8 con el original que tiene la carga en el vértice.

- Las 3 caras opuestas al vértice con la carga, forman parte del wbo grande. Cada una

son una de las $4 \times 6 = 24$ superficies que envuelven la carga en el wbo grande.

\Rightarrow El flujo a través de ellas es

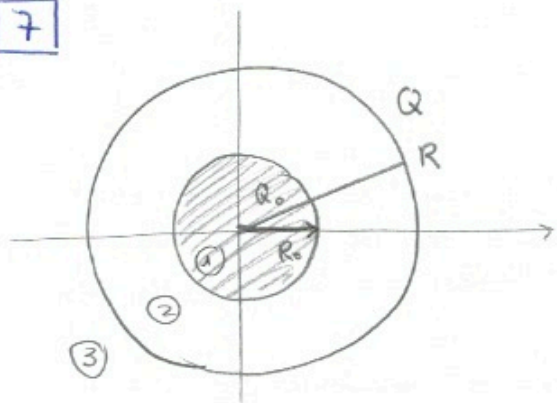
$$\phi_{\text{cara}} = \frac{\phi_{\text{TOT}}}{24} = \frac{4\pi\kappa q}{24}$$

- Las otras tres caras del wbo (pequeño) que contienen el vértice donde está la carga tienen un flujo nulo porque sus superficies son perpendiculares al campo que vea la carga:

$$\vec{E} \perp \vec{A} \Rightarrow \phi_{\text{cara}} = 0$$

7

p 3.9



• Hay tres zonas del espacio donde calcular \vec{E} y V :

① $r < R_0$

Como la esfera es metálica, toda la carga Q_0 se localiza en su superficie. Por tanto, aplicando la ley de Gauss,

veremos que el campo dentro es nulo, $\boxed{\vec{E}_1 = 0}$, y el potencial constante $\boxed{V_1 = C_1}$.

② $R_0 < r < R$ Aplicamos Gauss: $\phi_2 = \oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{A} = |\vec{E}_2(r)| 4\pi r^2 = 4\pi k Q_0$

$\Rightarrow |\vec{E}_2(r)| = k \frac{Q_0}{r^2}$ en dirección radial

$\boxed{\vec{E}_2(r) = k \frac{Q_0}{r^2} \vec{r}}$

$\Rightarrow \Delta V_2 = - \int_{\text{camino radial}} \vec{E}_2(r) \cdot d\vec{r} = - \int |\vec{E}_2(r)| dr = -k Q_0 \left(-\frac{1}{r}\right) + C_2$

$\boxed{V_2(r) = k \frac{Q_0}{r} + C_2}$

③ $r > R$ Aplicamos Gauss igualmente, ahora con la carga total $Q_0 + Q$

$\boxed{\vec{E}_3(r) = k \frac{Q_0 + Q}{r^2} \vec{r}}$

$\boxed{V_3(r) = k \frac{Q_0 + Q}{r} + C_3}$

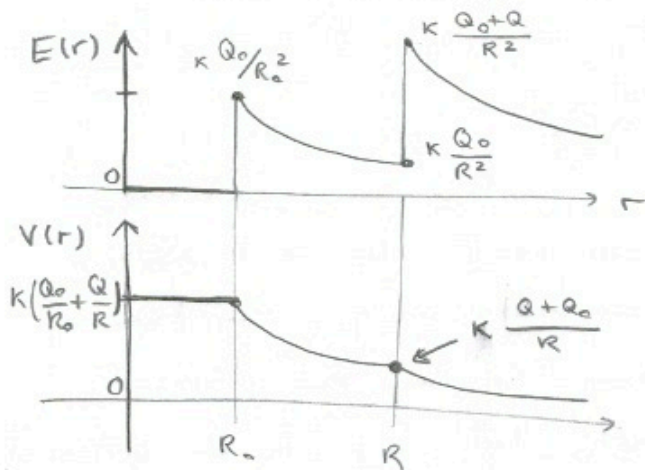
• Sob nos queda determinar C_1, C_2, C_3 , imponiendo la continuidad en el potencial $V(r)$ y la condición de contorno $V(\infty) = 0$:

• $\lim_{r \rightarrow \infty} V_3(r) = 0 \Rightarrow \boxed{C_3 = 0}$

• $V_3(R) = V_2(R) \Rightarrow k \frac{Q_0 + Q}{R} = k \frac{Q_0}{R} + C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = k \frac{Q}{R}}$

• $V_2(R_0) = V_1(R_0) \Rightarrow k \frac{Q_0}{R_0} + k \frac{Q}{R} = C_1 \Rightarrow \boxed{C_1 = k \left(\frac{Q_0}{R_0} + \frac{Q}{R} \right)}$

- Para pintar $E(r)$ y $V(r)$ asumimos $Q, Q_0 > 0$



→ El campo es discontinuo debido a la acumulación de carga en la superficie

→ Pero el potencial es siempre continuo.

- ¿Qué ocurre si las esferas se conectan con un cable?

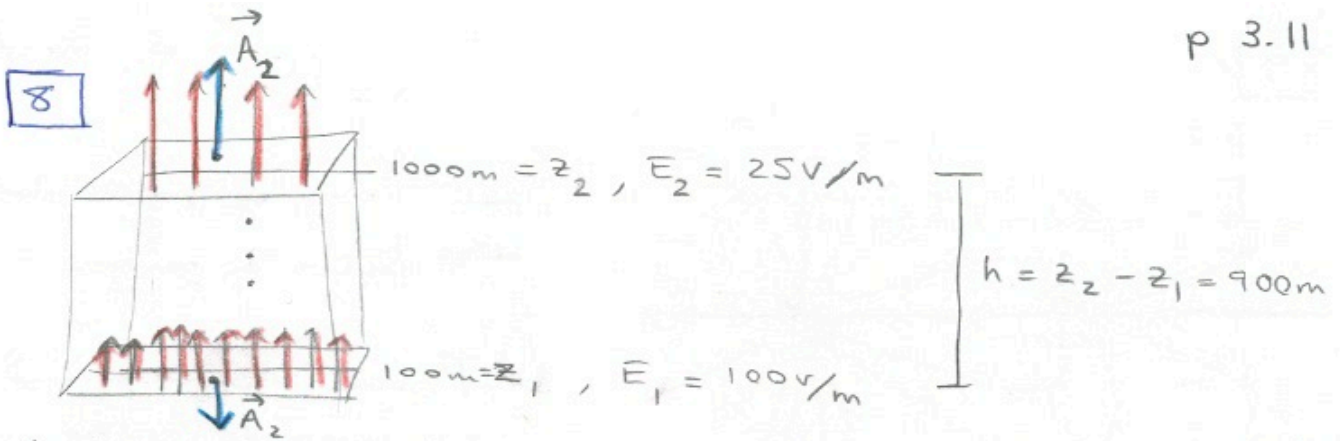
Como ambas esferas son metálicas, la carga se redistribuye hasta ocupar la superficie más externa, la de la esfera más grande. En la esfera pequeña ya no habría carga.

$$\begin{cases} \vec{E}_1(r) = \vec{E}_2(r) = 0 & \text{y} & \vec{E}_3 = k \frac{Q_0 + Q}{r^3} \vec{r} \\ V_1 = V_2 = C_2 = k \frac{Q_0 + Q}{R} & \text{y} & V_3(r) = k \frac{Q_0 + Q}{r} \end{cases}$$

→ igual que antes para la región ③ solo

la constante se encuentra de nuevo por continuidad:

$$V_1 = V_2 = V_3(R)$$



• Aplicamos la ley de Gauss usando como superficie virtual una caja de base A y altura $z_2 - z_1 = h = 900\text{m}$.

El campo $\vec{E}(z)$ es paralelo al área de las paredes laterales y por tanto no atraviesa ningún flujo.

El flujo total es solo la suma del que atraviesa las caras inferior y superior, donde $\vec{E} \parallel \vec{A}$ (paralelos).

$$\phi_{\text{Total caja}} = \oint_{\text{sup}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{A} + \oint_{\text{inf}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = E_2 \cdot A - E_1 \cdot A$$

\vec{E}_1, \vec{E}_2 son constantes en las superficies

el vector \vec{A}_1 es en dirección hacia abajo (tiene signo -)

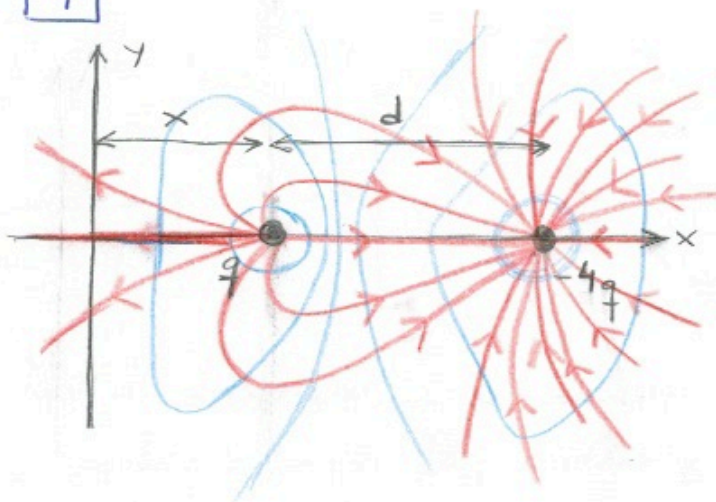
Ley Gauss:

$$\phi_{\text{Tot}} = 4\pi K Q_{\text{dentro caja}}$$

$$\Rightarrow \frac{Q_{\text{dentro caja}}}{A \cdot h} = \rho = \text{densidad de carga entre las superficies (por unidad de volumen)} = \frac{E_2 - E_1}{4\pi K h} = -8.36 \times 10^{-13} \text{ C/m}^3 = 5.22 \times 10^5 e/\text{m}^3$$

$$(q_e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C})$$

9



— líneas equipotenciales
 → líneas de campo

- Ponemos más densidad de líneas de campo hacia la carga $-4q$ (\vec{E} creado es más intenso)

- Las líneas equipotenciales son perpendiculares a las de campo (aunque en el dibujo no siempre lo sean porque es difícil pintarlo).
- Según este dibujo y su análisis cualitativo, el campo total $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_{-4q}$ solo se anula en el infinito y en algún punto sobre el eje x cuando

$$|\vec{E}_q| = |\vec{E}_{-4q}| \Rightarrow \cancel{k} \frac{q}{x^2} = \frac{+k4q}{(x+d)^2}$$

{ El origen del eje x lo situamos a la izquierda de ambas cargas

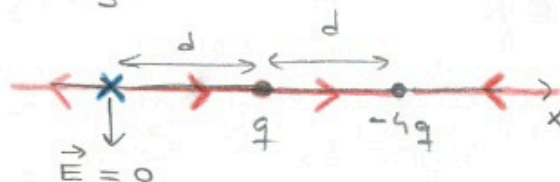
• Resolvemos: $(x+d)^2 = 4x^2$

$$x^2 + d^2 + 2xd - 4x^2 = 0$$

$$3x^2 - d^2 - 2xd = 0 \rightarrow x = \frac{2d \pm \sqrt{4d^2 + 12d^2}}{6} = \frac{2d \pm 4d}{6}$$

$$\begin{cases} x_1 = d \\ x_2 = -2d/6 = -d/3 \end{cases}$$

Solución $x_1 = d$:

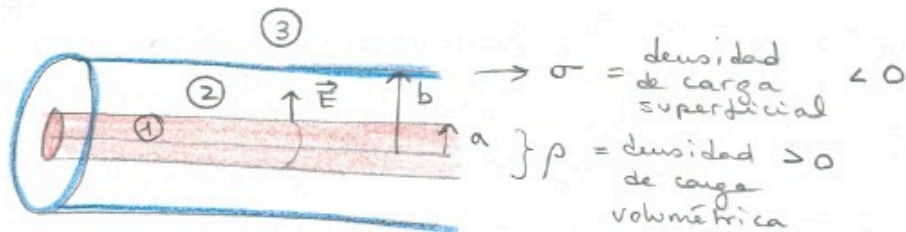


Esta es la buena solución porque los campos tienen sentido opuesto:
 $\vec{E}_q = -\vec{E}_{-4q}$

Solución $x_2 = -d/3$: En este punto: $|\vec{E}_q| = |\vec{E}_{-4q}|$ pero

el sentido de los campos es el mismo, el campo total no se anula sino que es $|\vec{E}| = 2|\vec{E}_q|$, el doble.
 Es un punto entre las dos cargas.

10



carga total en el cable = 0 (es neutro!)

Calculamos \vec{E} y V en las distintas zonas; siempre radial:

① $r < a$

ley Gauss: $\phi_1 = \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = E_1 \oint dA = 4\pi k \rho \cdot \underbrace{\pi r^2 L}_{\text{volumen del cilindro virtual}}$

con un cilindro $r < a$ de longitud L
 área del cilindro virtual (sin tapas)

$$\Rightarrow \boxed{E_1(r)} = \frac{4\pi k \rho \pi r^2 L}{2\pi r L} = \boxed{2\pi k \rho r}$$

y $\boxed{V_1} = - \int_{\text{camino radial}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int E_1(r) dr = -2\pi k \rho \int r dr = \boxed{-\pi k \rho r^2 + C_1}$

$\vec{E} \parallel d\vec{r}$

② $a < r < b$ igualmente ...

$$\phi_2 = E_2 \cdot 2\pi r L = 4\pi k \rho \underbrace{\pi a^2 L}_{\text{volumen donde hay carga, cilindro interior}} \Rightarrow \boxed{E_2(r) = \frac{2\pi k \rho a^2}{r}}$$

$$\boxed{V_2} = - \int E_2(r) dr = -2\pi k \rho a^2 \int \frac{1}{r} dr = \boxed{-2\pi k \rho a^2 \ln(r) + C_2}$$

$\ln r$

③ Al ser el cable neutro, la carga total es nula

\Rightarrow al aplicar Gauss $\boxed{\vec{E}_3 = 0}$ y $\boxed{V_3 = C_3}$

• Determinamos C_1, C_2, C_3 imponiendo, por ejemplo, $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$

$\Rightarrow \boxed{C_3 = 0}$

• Obtenemos C_1, C_2 por la continuidad de $V(r)$:

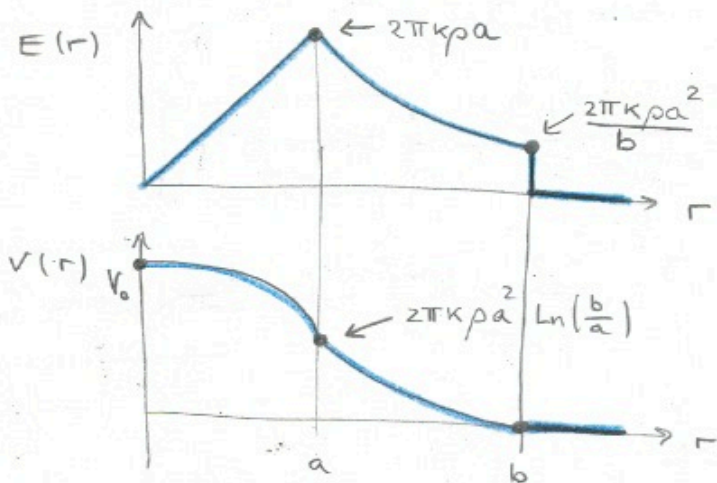
$$V_3(b) = V_2(b) \Rightarrow C_3 = 0 = -2\pi\kappa\rho a^2 \ln(b) + C_2$$

$$C_2 = 2\pi\kappa\rho a^2 \ln(b)$$

$$V_2(a) = V_1(a) \Rightarrow -2\pi\kappa\rho a^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right) = -\pi\kappa\rho a^2 + C_1$$

$$C_1 = 2\pi\kappa\rho a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \pi\kappa\rho a^2$$

• Dibujamos $E(r)$ y $V(r)$:



$$\begin{cases} E_1(r) = 2\pi\kappa\rho r > 0 \\ \text{recta} \\ E_2(r) = \frac{2\pi\kappa\rho a^2}{r} > 0 \\ E_3(r) = 0 \end{cases}$$

• \vec{E} tiene una discontinuidad en $r=b$

• $V(r)$ es siempre continuo.

$$\begin{cases} V_1(r) = \underbrace{\pi\kappa\rho(a^2 - r^2)}_{\text{parábola invertida}} + \underbrace{2\pi\kappa\rho a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}_{> 0} > 0 \text{ para } r < a \\ V_2(r) = 2\pi\kappa\rho a^2 \ln\left(\frac{b}{r}\right) > 0 \text{ para } b > r \\ V_3(r) = 0 \end{cases}$$

$$V_0 = V_1(0) = \pi\kappa\rho a^2 + 2\pi\kappa\rho a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) > 0$$