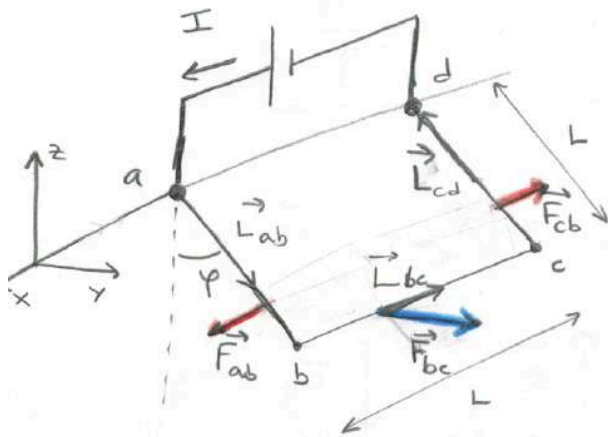


Soluciones a los problemas del tema 5

Elena del Valle Rebol
curso 2015-2016

1 Encuentramos todas las fuerzas que operan sobre la parte móvil del circuito:



- * \vec{F}_g fuerza de la gravedad
- * \vec{F}_m fuerza de Lorentz que produce el \vec{B} uniforme sobre los hilos con corriente
- * \vec{T} la tensión que soporta el circuito.



$\vec{F}_g = mg(-\hat{k})$

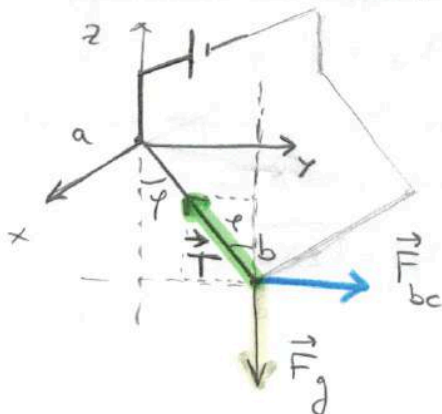
\vec{F}_m tiene 3 partes
($\vec{F}_{Lor} = I \vec{L} \times \vec{B}$)

$\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{cd}$ por simetría (regla mano derecha!)
↳ se anulan → podemos olvidarnos de ellas

$\vec{F}_{bc} = I \vec{L}_{bc} \times \vec{B} = I L B \hat{j}$
 $\vec{L}_{bc} = -L \hat{i}$ $\vec{B} = B \hat{k}$

La \vec{T} (tensión) recorre los lados a b y cd a partes iguales:
 $\frac{T}{2} = T_{ab} = T_{cd}$, en dirección de cada lado

Visto lateralmente: hay equilibrio de todas las componentes



$\sum \vec{F} = 0$

$\sum F_x = 0$
 $\sum F_y = 0$
 $\sum F_z = 0$

$T_z = T \cos \varphi$
 $T_y = T \sin \varphi$

componentes de \vec{T}

- Aplicamos la condición de equilibrio a todas las componentes:

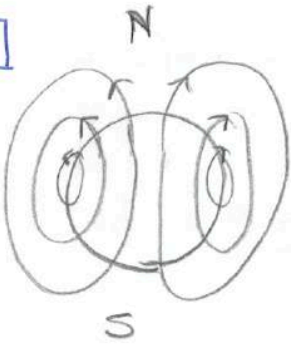
$$\text{eje } y : T \sin \varphi = F_{bc} = I L B$$

$$\text{eje } z : T \cos \varphi = F_g = mg$$

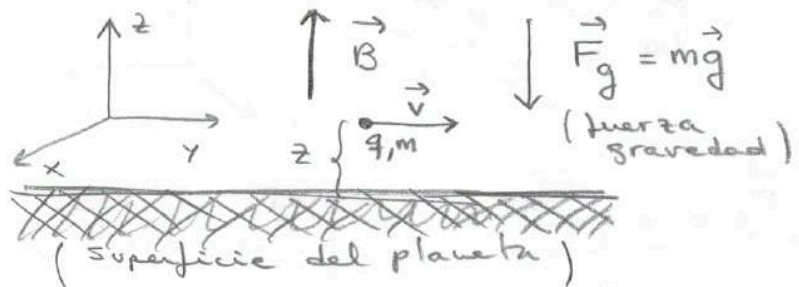
- Despejamos T en ambas ecuaciones para obtener una condición de equilibrio =

$$T = \frac{I L B}{\sin \varphi} = \frac{mg}{\cos \varphi} \Rightarrow \boxed{\tan \varphi = \frac{I L B}{mg}}$$

2



En el polo norte el campo \vec{B} es vertical:



- La gravedad acelera la masa hacia abajo $\vec{F}_g = mg(-\hat{k})$

- El campo \vec{B} uniforme crea una fuerza de Lorentz

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B} = q v B \hat{i} \quad (\text{en dirección } x, \text{ saliente del papel})$$

$$\boxed{\vec{B} = B \hat{k} \text{ y } \vec{v} = v \hat{j}}$$

Para comprender el movimiento tenemos que analizarlo por componentes:

eje z \rightarrow partícula de una velocidad nula ($v_z = 0$),

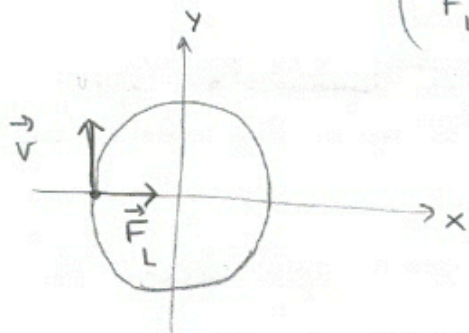
sufre una aceleración g hacia abajo \rightarrow movimiento uniformemente acelerado con $a_z = g$ y ...

\rightarrow velocidad final $v_z(t_f) = g t_f$ con $t_f =$ tiempo en que toca el suelo, lo obtenemos del espacio recorrido:

$$\rightarrow z = \frac{1}{2} g t_f^2 \rightarrow t_f = \sqrt{\frac{2z}{g}} \Rightarrow v_z(t_f) = \sqrt{2z g}$$

ejes xy → simultáneamente también experimenta una aceleración $a_x = qvB/m$ que irá cambiando de dirección.

$$\left(\begin{array}{l} 2^{\text{da}} \text{ ley Newton} \\ F_L = m a_x \end{array} \right)$$

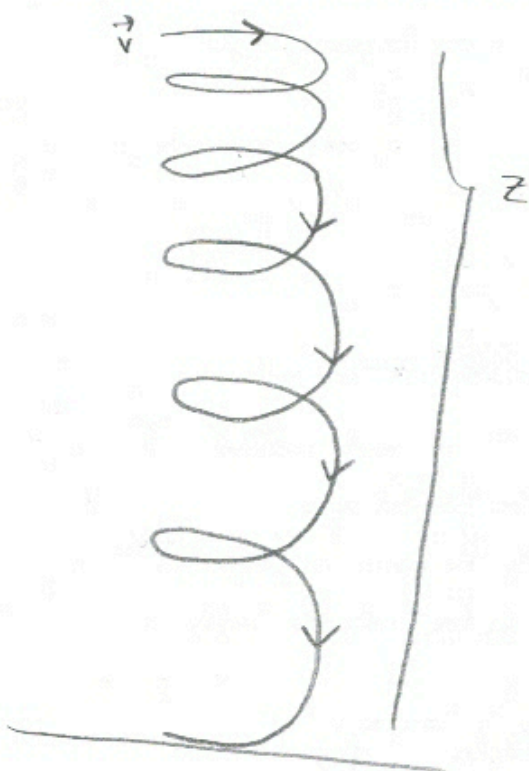


Recordamos de clase, apartado 5-3, que esto genera un movimiento circular uniforme donde la fuerza centrípeta es la F_L .

Trazará círculos en el plano xy con un radio de la órbita:

$$R = \frac{mv}{qB} \text{ y periodo: } T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

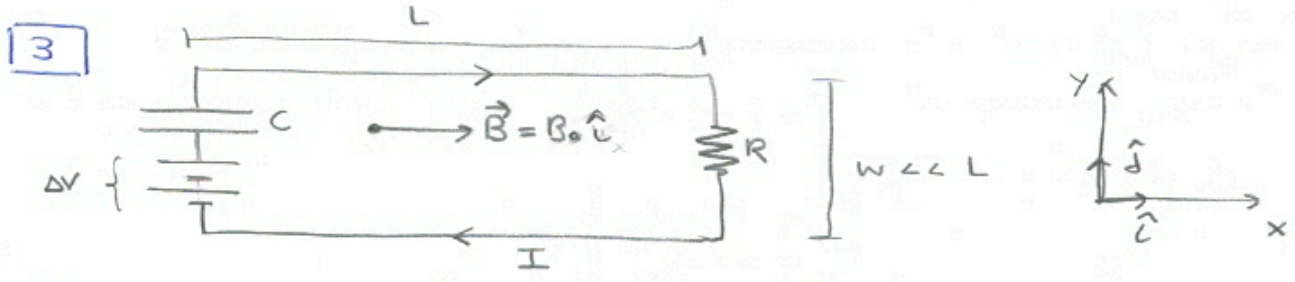
La combinación de los dos movimientos es una hélice de paso creciente debido a la aceleración vertical



También podríamos calcular cuántas vueltas da antes de tocar el suelo:

$$n \text{ vueltas} = \frac{t_f}{T} = \sqrt{\frac{2z}{g}} \frac{qB}{2\pi m}$$

o los sucesivos pasos de la hélice, etc...



- El circuito se cierra en \$t=0\$ y comienza a cargarse el condensador, pasando una corriente que depende del tiempo \$I(t)\$.
- Primero, nos damos cuenta que la fuerza que ejerce el campo \$\vec{B}\$ uniforme sobre el hilo inferior es cero:

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = I(t) \vec{L} \times \vec{B} = 0 \quad \text{porque } \vec{L} \text{ y } \vec{B} \text{ son paralelos}$$

$\vec{L} = L \hat{i}_x$ $\vec{B} = B_0 \hat{i}_x$

(nos olvidamos del campo \$\vec{B}\$)

- La corriente \$I(t)\$ que comienza a circular por el circuito es la de la carga de un condensador que vimos en el tema 4, apartado 4.3:

$$I(t) = I_0 e^{-t/RC} = \frac{\Delta V}{R} e^{-t/RC}$$

$$I_0 = \frac{\Delta V}{R}$$

Esta corriente circulando por el hilo superior del circuito genera un campo magnético donde está el hilo inferior y produce sobre él una fuerza.

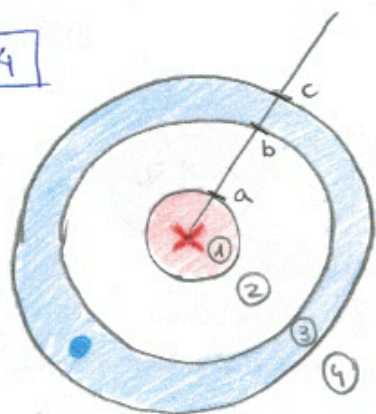
Esta es la fuerza de atracción (que hemos visto en el apartado 5.7 de este tema) entre dos hilos con corrientes en distintos sentidos:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I^2(t) L}{w} \hat{y} = \frac{\mu_0 L}{2\pi w} \left(\frac{\Delta V}{R} e^{-t/RC} \right)^2 \hat{y}$$

dirección de atracción hacia arriba

(hemos despreciado el efecto de los hilos laterales porque \$w \ll L\$)

4



I_1 = entra en el papel

I_2 = sale del papel

• Por simetría sabemos que el campo $\vec{B}(r)$ siempre será tangencial a las circunferencias de los cortes transversales a los hilos



• Su dirección depende de la dirección neta de la corriente que encierra cada circunferencia.

• Para calcular el módulo $B(r) = |\vec{B}(r)|$ y el sentido de circulación, aplicamos la ley de Ampère usando como camino cerrado de integración diferentes circunferencias de radio r :

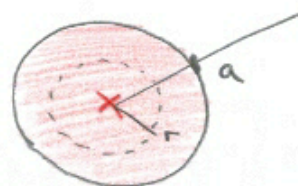
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \underbrace{B(r)}_{\text{simetría}} \oint dl = B(r) 2\pi r = \underbrace{\mu_0}_{\text{Ampère}} \sum_i I_i$$

$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \sum_i I_i \rightarrow$ Solo tenemos que evaluar $\sum_i I_i =$ la corriente total encerrada por la circunferencia, en cada zona.

① $r < a$

De la corriente total I_1 , solo una fracción está encerrada dentro de la circunferencia de radio $r < a$:

$$\underbrace{\frac{I_1}{\pi a^2}}_{\substack{\text{densidad} \\ \text{de corriente} \\ \text{por unidad} \\ \text{de área de la sección del hilo}}} \cdot \underbrace{\pi r^2}_{\substack{\text{área de la sección del hilo} \\ \text{encerrada}}} = \text{fracción de corriente}$$



$$B_{(1)}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{I_1}{\pi a^2} \pi r^2 = \frac{\mu_0 I_1 r}{2\pi a^2}$$



con circulación
hacia la derecha
(regla de la mano derecha)

$$\textcircled{2} \quad a < r < b$$

Ahora el camino cerrado encierra todo el hilo interior

$$\Rightarrow B_{(2)}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_1$$

con circulación también
a la derecha



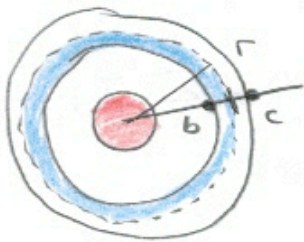
$$\textcircled{3} \quad b < r < c$$

encierra I_1 al completo y parte de I_2

área total de la
sección del hilo
exterior

$$= \pi (c^2 - b^2)$$

porque
no es un
círculo
sino un aro



área de la
sección del
hilo exterior
encerrada dentro
de la circunferencia
de radio r

$$= \pi (r^2 - b^2)$$

corriente total
del hilo exterior
encerrada en
la circunferencia
de radio r

$$= \frac{I_2}{\pi(c^2 - b^2)} \cdot \underbrace{\pi(r^2 - b^2)}_{\text{área}}$$

densidad
de carga del
hilo 2
por unidad de área

$$\Rightarrow B_{(3)}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \left[I_1 - I_2 \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right]$$

signos opuestos por tener corrientes opuestas

Puede que el campo se haga 0: en $r=r_0$

$$\textcircled{3} \quad B(r) = 0 \quad \rightarrow \quad I_1 = I_2 \frac{r_0^2 - b^2}{c^2 - b^2}$$

$$r_0 = \sqrt{\left(\frac{I_1}{I_2} \right) (c^2 - b^2) + b^2}$$

existe un radio r_0 para el que $B(r) = 0$ si

$$I_2 > I_1 \quad \text{ya que} \quad \frac{r_0^2 - b^2}{c^2 - b^2} < 1.$$

$\textcircled{4} \quad r > c$

Aquí volvemos al caso sencillo donde encerramos las dos corrientes al completo:

$$B_{\textcircled{4}}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} (I_1 - I_2)$$

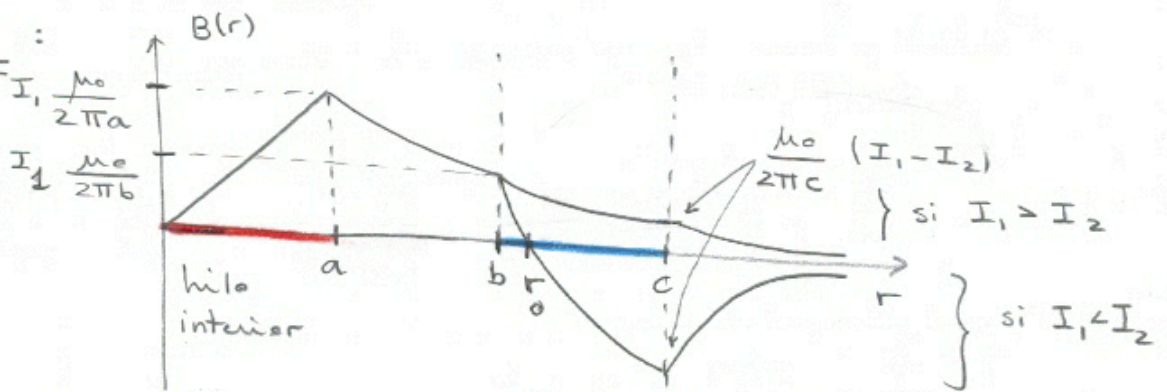
• Si $I_2 > I_1$, el campo habrá cambiado su dirección de circulación

→ hacia la izquierda



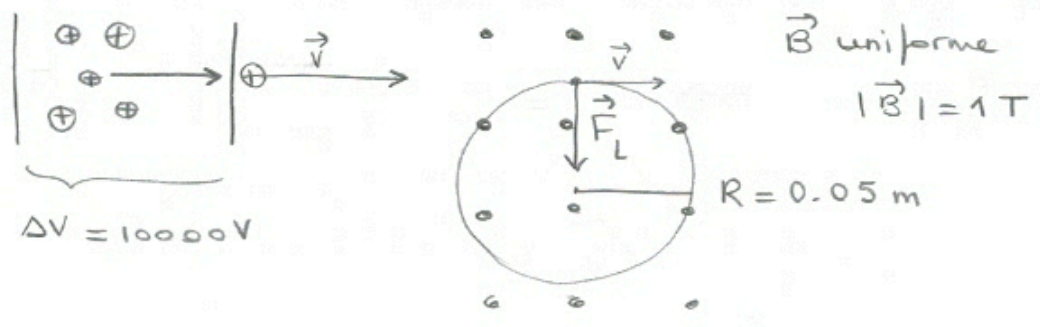
• Si $I_2 < I_1$, el campo seguirá circulando hacia la derecha.

Lo pintamos:



Con las 2 posibilidades estudiadas a partir de $r = b$

5



Los iones tendrán un movimiento circular al entrar en la zona con \vec{B} , llevando una \vec{v} inicial. La fuerza de Lorentz que lo produce es

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B} \xrightarrow[\vec{B} \perp \vec{v}]{\text{suponendo}} F_L = q v B = m a = m \frac{v^2}{R}$$

\downarrow
 movimiento circular
 2ª ley Newton

$$q v B = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow \boxed{\frac{q}{m} = \frac{v}{R B}}$$

• Solo necesitamos calcular la velocidad con la que los iones entran el campo magnético. La podemos obtener por conservación de energía: los iones se aceleran debido a la diferencia de potencial hasta una velocidad final (energía cinética) máxima:

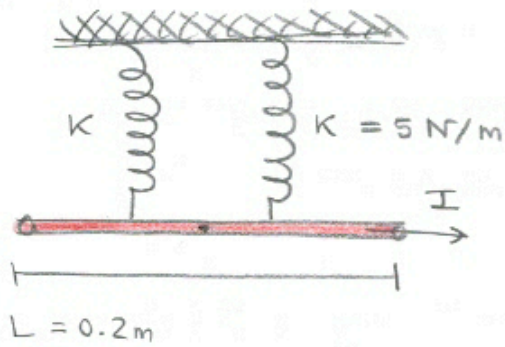
$$E_c^{\max} = \frac{1}{2} m v^2 = |q| \Delta V \rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2 |q| \Delta V}{m}}}$$

• Substituímos y volvemos a despejar q/m :

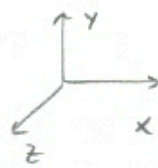
$$\frac{q}{m} = \sqrt{\frac{2 q \Delta V}{m}} \frac{1}{R B} \xrightarrow[\text{cuadrado}]{\text{elevamos al}} \frac{q^2}{m^2} = \frac{2 \Delta V}{R^2 B^2} \frac{q}{m}$$

$$\boxed{\frac{q}{m} = \frac{2 \Delta V}{R^2 B^2} = \frac{2 \cdot 10^4}{0.05^2 \cdot 1^2} = 8 \cdot 10^6 \text{ C/kg}}$$

6



$$|\vec{B}| = 0.5 \text{ T} = \text{cte} = B$$



$$\begin{cases} \rho = 5.1 \text{ g/cm} = 0.51 \text{ kg/m} \\ m = \rho L = 0.102 \text{ kg} \end{cases}$$

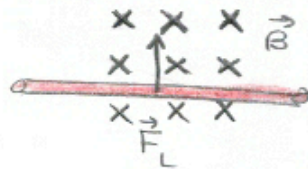
• Sobre la varilla se ejercen 3 fuerzas

• Para maximizar la \vec{F}_L con sentido hacia arriba (\hat{u}_y) necesitamos

que \vec{B} tenga la dirección $-\hat{u}_z$ (hacia dentro del papel)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = -B \hat{u}_z}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_L = I L B \hat{u}_y$$



• Cuando $\boxed{I = 0}$ solo están presentes la fuerza gravitatoria (el peso de la barra) y la elástica. En el punto de equilibrio estas fuerzas se anulan:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_g + \vec{F}_{el} = 0 \Rightarrow mg = k_T \Delta l$$

$$\Delta l = \frac{mg}{k_T} = \frac{0.102 \cdot 9.8}{5+5} = 0.1 \text{ m}$$

Importante!!: $\boxed{k_T = k + k}$, al tener 2 muelles paralelos la constante elástica total es el doble (la fuerza elástica que se ejerce es el doble)

$\boxed{I = 5 \text{ A}}$

• Cuando pasa corriente, hay que añadir la fuerza de Lorentz:

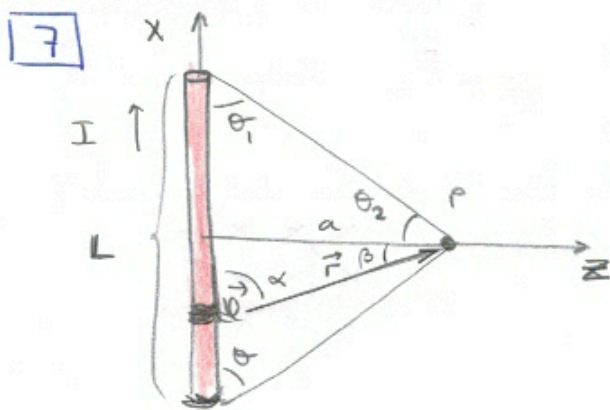
$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_g + \vec{F}_{el} + \vec{F}_L = -mg + k_T \Delta l + I L B = 0 \text{ (equilibrio)}$$

$$\Delta l = \frac{mg - I L B}{k + k} = 0.05 \text{ m}$$

• Para que el alargamiento sea $\Delta l = 0$, el peso y la fuerza de Lorentz se tienen que compensar totalmente. Usando la fórmula anterior:

$$\Delta l = \frac{mg - ILB}{2k} = 0 \rightarrow mg = ILB$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{mg}{LB} = \frac{0.102 \cdot 9.8}{0.2 \cdot 0.5} = 9.96 \text{ A}}$$



Podemos usar los cálculos de clase para el campo creado por un hilo infinito, solo cambiando los límites de integración:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \rightarrow \text{la dirección del campo es entrando al papel (x)}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dx \sin\alpha}{r^2} \rightarrow \text{el módulo}$$

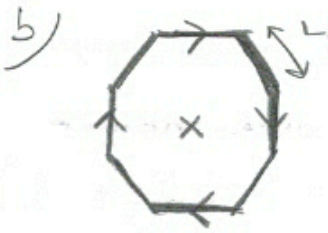
$$B = \int_{\text{hilo}} dB \quad \text{usando el ángulo } \beta \text{ para integrar}$$

substituímos $\begin{cases} \sin\alpha = \cos\beta \\ \cos\beta = \frac{a}{r} \rightarrow r = \frac{a}{\cos\beta} \\ \tan\beta = \frac{x}{a} \rightarrow dx = a \frac{d\beta}{\cos^2\beta} \end{cases}$

$$\boxed{B} = \int_{-\theta_2}^{\theta_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \cos\beta d\beta = \frac{\mu_0 2I}{4\pi a} \sin\theta_2 = \frac{\mu_0 L I / a}{4\pi \sqrt{a^2 + (L/2)^2}}$$

Los límites ya no son $\pm \frac{\pi}{2}$!!

$$\boxed{\sin\theta_2 = \frac{aL/2}{\sqrt{a^2 + (L/2)^2}}}$$



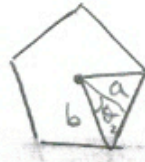
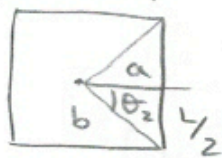
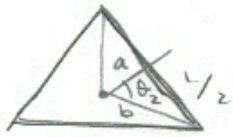
Tomemos por ejemplo un octógono ($N=8$). Todos los lados contribuyen por igual al campo total \vec{B}_N , que tiene dirección entrante en el papel (x).

Su módulo es la suma: $|\vec{B}_N| = \sum_{i=1}^N |\vec{B}_i| = \frac{\mu_0}{4\pi} N \frac{L I / a}{\sqrt{a^2 + (L/2)^2}}$

Vamos a expresar $|\vec{B}_N|$ en función de sus características principales

- lado L
- nº de lados N

Para ello vemos que el ángulo θ_2 se puede obtener:



etc...

a = apotema

b = radio

$$\theta_2 = \frac{\text{ángulo de una vuelta completa}}{2 \times \text{nº de lados}} = \frac{2\pi}{2N} = \frac{\pi}{N}$$

También: $\left\{ \begin{array}{l} \sin \theta_2 = \sin \frac{\pi}{N} = \frac{L/2}{b} \\ \cos \theta_2 = \cos \frac{\pi}{N} = \frac{a}{b} \end{array} \right\} \Rightarrow a = b \cos \frac{\pi}{N} = \frac{L/2}{\sin \frac{\pi}{N}} \cos \frac{\pi}{N}$

Volviendo un paso atrás en la fórmula de B_T , podemos substituir directamente

$$\frac{\sin \theta_2}{a} = \frac{\sin \frac{\pi}{N}}{L/2 \cos \frac{\pi}{N}}$$

$$\Rightarrow |\vec{B}_N| = \frac{\mu_0}{4\pi} N I \frac{\sin^2 \frac{\pi}{N}}{L \cos \frac{\pi}{N}}$$

c) Primero expresamos L en función del perímetro total del polígono y su n° de lados, para poder tomar el límite $N \rightarrow \infty$ (y ver cómo L tiende a 0):

$$L = P/N$$

También podemos expandir el $\sin \frac{\pi}{N}$ y $\cos \frac{\pi}{N}$ en series de Taylor y quedarnos a primer orden ya que $\frac{\pi}{N}$ tiende a ser muy pequeño cuando N es muy grande:

$$\begin{cases} \sin \alpha \approx \alpha \\ \cos \alpha \approx 1 \end{cases} \quad \text{cuando } \alpha \text{ es muy pequeño}$$

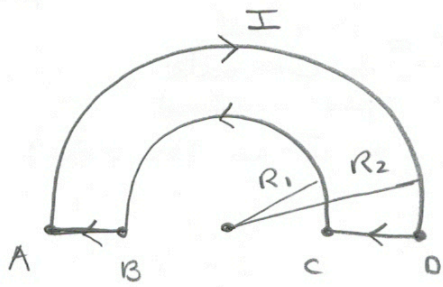
$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\vec{B}_N| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mu_0}{4\pi} N \cdot 4I \frac{\left(\frac{\pi}{N}\right)^2}{\frac{P}{N} \times 1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4I\pi^2}{P}$$

El perímetro, cuando $N \rightarrow \infty$, tiende a ser el de una circunferencia $P = 2\pi R$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\vec{B}_N| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I\pi}{R} = B_{\text{espira circular de radio } R}$$

c. q. d.

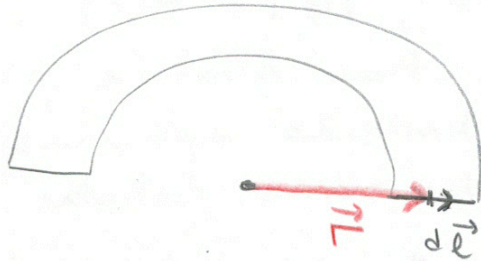
8



Para calcular el campo sumamos las contribuciones de cada tramo:

$$\vec{B} = \vec{B}_{AD} + \vec{B}_{DC} + \vec{B}_{CB} + \vec{B}_{BA} \quad \text{usando Biot-Savart} \quad \vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

• Notamos que en los tramos de la base (BA y DC) los vectores $d\vec{l}$ y \vec{r} tienen la misma dirección $\Rightarrow d\vec{l} \times \vec{r} = 0$
 $\Rightarrow \vec{B}_{BA} = \vec{B}_{DC} = 0$

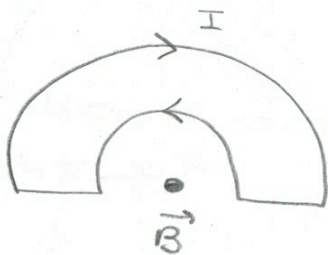


• Las circunferencias crean cada una un campo que es simplemente la mitad del de una espira circular del mismo radio ($B_{\text{espira}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I}{R}$) en dirección perpendicular al plano del circuito:

$$|\vec{B}| = |\vec{B}_{AD}| - |\vec{B}_{CB}| = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi I \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

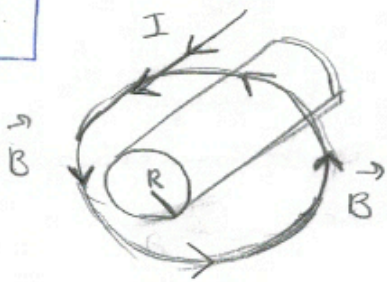
signos opuestos porque I fluye en sentidos opuestos.

como $R_2 > R_1 \Rightarrow \frac{1}{R_2} < \frac{1}{R_1} \Rightarrow$ el sentido del campo es el que marca la circunferencia interior



Sale del papel!

9



$$J = \alpha r = \begin{matrix} \text{densidad} \\ \text{de corriente} \\ \text{por unidad} \\ \text{de \u00e1rea (secci\u00f3n)} \end{matrix}$$

- Por simetr\u00eda vemos que el campo \vec{B} tiene la direcci\u00f3n que circula alrededor del hilo en el sentido hacia la izquierda (seg\u00fan el dibujo) \Rightarrow regla de la mano derecha
- Su m\u00f3dulo depender\u00eda solo de la distancia al centro, $|\vec{B}| = B(r)$, ya que la densidad de carga tiene simetr\u00eda cil\u00edndrica: $J = J(r)$. Para calcularlo aplicamos la ley de Amp\u00e8re en las dos zonas distintas del espacio:

I) $r < R$ dentro del hilo

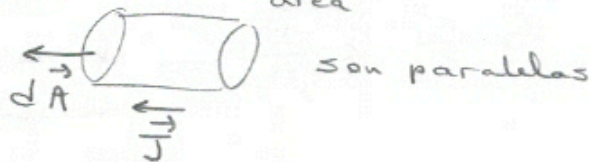
$$\oint_{\vec{B}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) \oint_{\vec{I}} d\vec{l} = B(r) 2\pi r = \mu_0 \sum_i I_i$$

\downarrow usamos circunferencias conc\u00e9ntricas al hilo para calcular la integral ($\vec{B} \parallel d\vec{l}$) \downarrow Amp\u00e8re

la corriente que encierra se calcula integrando:

$$I_{enc} = \int_{\text{\u00e1rea}} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{\u00e1rea}} J \cdot dA = \alpha \int_0^r r' 2\pi r' dr'$$

lo que necesitamos para la integral



calculamos el dA derivando: $A = \pi r'^2$
 $dA = 2\pi r' dr'$

$$I_{enc} = 2\pi\alpha \frac{r^3}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{B(r)}{I} = \mu_0 \frac{2\pi\alpha r^3}{3 \cancel{2\pi r}} = \mu_0 \alpha \frac{r^2}{3}}$$

II) $r > R$ Todo igual salvo que la integral para calcular I_{enc} se hace entre 0 y R :

$$I_{enc} = \alpha \int_0^R r'^2 2\pi dr' = 2\pi\alpha \frac{R^3}{3}$$

$$B_{II}(r) = \mu_0 \frac{2\pi\alpha R^3}{3 \cancel{2\pi} r} = \mu_0 \frac{\alpha R^3}{3 r} = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

también, si sabemos que la corriente total es I

Dibujamos el campo:

