

## ACELERACIÓN DE CORIOLIS

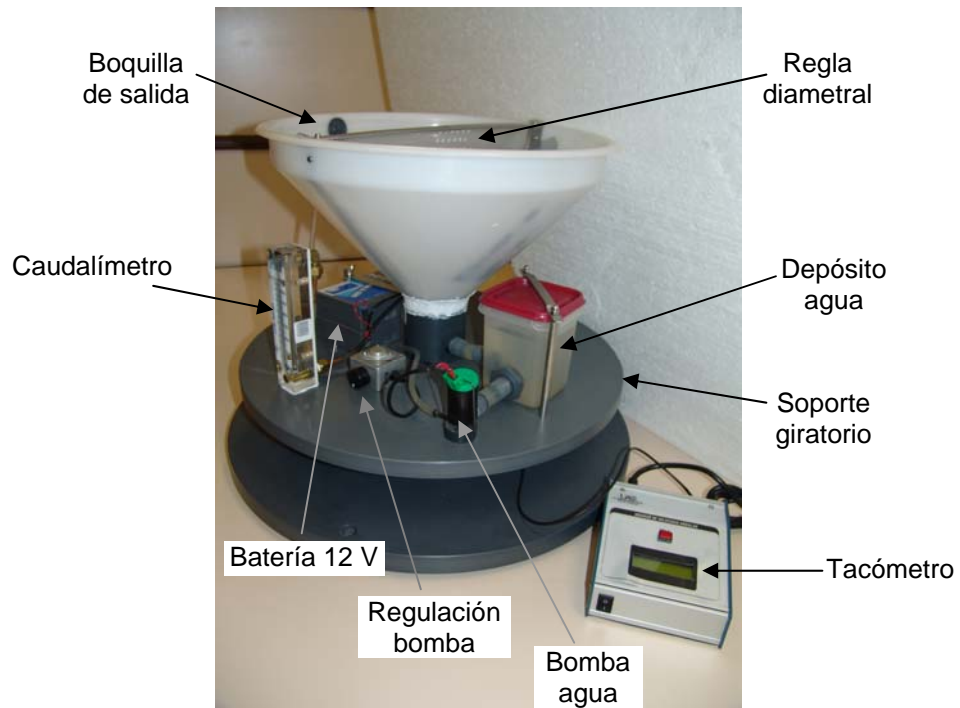
Fecha: 02/10/2013

### 1. Objetivo de la práctica

Medida experimental de la aceleración de Coriolis en un sistema giratorio en el Laboratorio.

### 2. Material

- Sistema completo compuesto de:
  - Recipiente en forma de embudo con regla diametral y soporte giratorio
  - Circuito cerrado de circulación de agua con depósito, bomba y boquilla
  - Batería de alimentación de la bomba a 12 V con regulación del voltaje
  - Tacómetro para medida de la velocidad de giro (revoluciones por minuto)

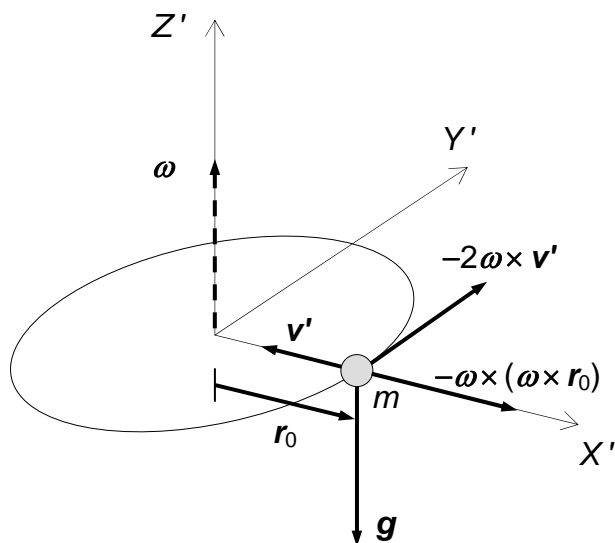


### 3. Teoría

Cuando un objeto se encuentra en un sistema de referencia que gira (sistema no inercial), la descripción de su movimiento es bastante más complicada que cuando el sistema está en reposo o se mueve con velocidad constante (sistema inercial). Si el objeto está en reposo en el sistema giratorio, necesita estar sometido a una fuerza (o aceleración) que lo mantenga solidario con el sistema. Esta es la llamada fuerza o aceleración centrípeta, que en el objeto se percibe como necesaria para compensar la tendencia del objeto a alejarse del eje de giro. A esta tendencia se le da el nombre de fuerza (o aceleración) centrífuga, que es una fuerza ficticia debida a la inercia. Si en vez de estar en reposo el objeto lleva una cierta velocidad  $v'$  en el sistema giratorio, además de la aceleración centrífuga, el objeto percibe otra fuerza de inercia llamada *aceleración de Coriolis*, nombre debido a su descubridor en 1835, Gaspard Coriolis, ingeniero y matemático francés (1792-1843). Si además el objeto está sometido a la gravedad como es el caso del chorro de agua del montaje de esta práctica, la expresión general de la aceleración (véase la bibliografía) viene dada por la expresión

$$\mathbf{a}' = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0) - 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (1)$$

En esta expresión,  $\mathbf{g}$  es la aceleración de la gravedad,  $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0)$  es la aceleración centrífuga y  $-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$  es la aceleración de Coriolis. Para el caso en que  $\mathbf{v}'$  está dirigida hacia el eje de giro, la figura 1 indica el significado y orientación de los diferentes vectores que aparecen en la expresión anterior en el sistema de referencia rotante.



**Figura 1.** Objeto  $m$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}'$  a lo largo del eje  $X'$ . El sistema de ejes  $X'Y'Z'$  gira con velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  alrededor de la vertical del laboratorio ( $Z'$ ),  $\mathbf{g}$  es la gravedad,  $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0)$  la aceleración centrífuga y  $-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$  es la de Coriolis que va separando al objeto del eje  $X'$  a lo largo de  $+Y'$ .

El sistema de referencia de la práctica gira alrededor de la vertical del Laboratorio, que tomaremos como eje Z y, respecto a ese sistema, el cuerpo (el chorro de agua) se mueve con una velocidad inicial horizontal  $v_0$  dirigida hacia el eje de giro a lo largo del eje X' (véase la Fig. 1). En estas condiciones, la gravedad  $\mathbf{g}$  sólo produce la caída del cuerpo hacia abajo pero de modo independiente del movimiento horizontal; por tanto no la consideraremos aquí. Además, teniendo en cuenta el pequeño radio ( $r_0 \sim 180$  mm) de nuestro sistema experimental y que la velocidad de rotación  $\omega$  es pequeña, la aceleración centrífuga del último término (de módulo igual a  $\omega^2 r_0$ ) se puede despreciar frente a la aceleración de Coriolis ( $2\omega v'$ ). En la Fig. 1 se observa que esta aceleración hace que el objeto se desvíe en el sentido marcado por la rotación del sistema, de modo que no llega al origen de coordenadas como ocurriría en un sistema en reposo, sino un poco desplazado sobre el eje Y'. Este desplazamiento  $\Delta y'$  vendrá determinado por un movimiento uniformemente acelerado con la aceleración de Coriolis, es decir

$$\Delta y' = \frac{1}{2} a_{Cor} t^2 = \frac{1}{2} (2\omega v_0) \left( \frac{r_0}{v_0} \right)^2 = \frac{\omega r_0^2}{v_0} \quad (2)$$

El tiempo  $t$  que tarda el objeto en llegar al eje Y' se ha tomado igual al que tardaría si el sistema no girara, porque el desplazamiento  $\Delta y'$  es suficientemente pequeño como para que la diferencia entre ambos se pueda despreciar (un análisis más detallado de este punto se puede ver en el Apéndice A al final del guión). Conociendo tres de las cuatro magnitudes de la fórmula anterior, se puede determinar la cuarta.

#### 4. Montaje

El montaje consiste en una plataforma giratoria sobre un rodamiento de baja fricción; la plataforma lleva todos los elementos necesarios para la circulación del agua. La circulación se produce con una pequeña bomba que toma el agua de un recipiente y la impulsa por un tubito de plástico flexible hasta el borde del embudo. Aquí hay una boquilla, de radio  $r_b \sim 1.5$  mm (se debe utilizar el valor y error indicados sobre la plataforma), que expulsa un chorro de agua aproximadamente horizontal y dirigido hacia el centro del embudo (el eje de giro); la distancia entre la boquilla y el eje de giro o *radio de giro* es  $r_0 \sim 180$  mm (se debe utilizar el valor y error indicados sobre la plataforma). En el diámetro perpendicular al chorro de agua se ha fijado una barrita que soporta una malla anti-salpicaduras, sobre la que hay marcas cada cen-

tímetro con objeto de que se puedan medir los desplazamientos del chorro producidos por el giro. La bomba está alimentada por una batería de 12 V y un regulador de intensidad que permite variar el caudal de agua y, por tanto, la velocidad del agua en la boquilla de salida. En la parte inferior del eje (la que queda por debajo de la plataforma con la batería, etc.) hay una rueda con aberturas radiales y un fotodiodo con fotodetector (“*photo-gate*”). Este sistema, junto con el medidor externo, permite medir las revoluciones por minuto a las que gira el conjunto en cada momento, es decir funciona como un *tacómetro*.

### **Observaciones.**

1. El recipiente de agua debe estar casi lleno (~3/4 del máximo) para que la bomba funcione correctamente (sin tomar aire, etc.).
2. En caso de que la batería se haya descargado, se debe poner a cargar en el cargador y sustituirla por la de repuesto. Esta debe estar bien cargada para que la velocidad del chorro de agua sea suficiente.

## **5. Medidas**

- 5.1. En primer lugar se deben hacer ensayos preliminares del sistema para familiarizarse con su funcionamiento: variando el control de intensidad de la bomba de agua, notando cómo se desplaza el chorro al girar la plataforma, etc. Para encontrar la justificación intuitiva del desplazamiento del agua, nótese que el chorro se está observando en el sistema del laboratorio, aunque se tiene permanentemente la referencia visual del sistema rotante. En el sistema del laboratorio, la velocidad del chorro de agua al salir de la boquilla tiene una componente tangencial a la circunferencia igual a  $\omega \times r_0$  (siempre perpendicular al eje rotante  $X'$ ). Esta componente de la velocidad es la responsable de que el chorro se desplace en el sentido de giro.
- 5.2. Para iniciar las medidas, con la plataforma parada, se subirá el caudal del agua, es decir su velocidad de salida, hasta que el chorro pase relativamente cerca de la parte inferior de la barrita diametral. Se anota el caudal que se haya fijado en ese momento y ya no se debe variar a lo largo de cada serie de medidas.
- 5.3. Ahora se hace girar la plataforma con la mano hasta que el chorro se desvíe algo más de 1 cm sobre la malla. Se sigue observando el punto en el que

choca el chorro con la malla mientras: *i)* se mantiene la mano preparada sobre el pulsador de parada de medida del tacómetro, y *ii)* se deja que disminuya libremente la velocidad de rotación hasta que el chorro coincida con el centro de la marca de 1 cm. En ese preciso momento se presiona el pulsador del tacómetro para dejar “congelada” la medida de  $\omega$  en el momento de pulsar, y se anotan (véase la Tabla 1) las revoluciones por minuto indicadas. Con este “método de coincidencia” es con el que se evitan más errores en la difícil medida del desplazamiento  $\Delta y'$ , que a pesar de todo es la más imprecisa en este montaje simple.

5.4. Se repite el paso anterior para desviaciones del chorro de 2 cm, 3 cm, 4 cm y 5 cm.

5.5. Si ahora se escribe la expresión (2) en la forma

$$\omega r_0^2 = v_0 \Delta y' \quad (3)$$

se tiene la ecuación de una recta. Por tanto, representando los valores de  $\omega r_0^2$  anotados en la Tabla 1 en función de los valores de  $\Delta y'$  los puntos deben situarse aproximadamente sobre una recta de pendiente  $v_0$ . Determínese la velocidad de salida del agua  $v_0$  a partir de dicha representación, además de su error; primero de modo gráfico y luego por mínimos cuadrados.

5.6. Dentro de los errores experimentales, este valor de  $v_0$  debe coincidir con el que se obtiene a partir del caudal dado por el caudalímetro. Como el caudal es el volumen que sale por unidad de tiempo,  $C = \Delta V / \Delta t$ , la velocidad del agua  $v_0$  está relacionada con  $C$  a través de la relación

$$C = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{S \Delta l}{\Delta t} = S v_0 \quad (4)$$

siendo  $S$  la sección de la boquilla de salida del agua y  $\Delta l$  la longitud recorrida por el chorro en el tiempo medido  $\Delta t$ . Compárese dicho valor con el estimado en 5.5. a partir de la aceleración de Coriolis.

**Calibración del caudalímetro** (sólo si fuera necesario). Se pesa un recipiente vacío, y con él se recoge una cierta cantidad de agua  $\Delta V$  ( $\sim 200 \text{ cm}^3$ ) directamente del chorro, midiendo el tiempo  $\Delta t$  que se emplea en recogerla con un cronómetro. Pesando de nuevo el recipiente con el agua y restando el peso del recipiente vacío se obtiene el peso del agua, y por tanto los  $\text{cm}^3$  exactos que se han recogido en ese

tiempo  $\Delta t$ . El caudal será simplemente  $C = \Delta V/\Delta t$ . (**PRECAUCION**: después de anotar el peso, el agua se debe volver a vaciar sobre el embudo para que el depósito recupere su nivel hasta  $\sim 3/4$  por lo menos).

## **Bibliografía**

Cualquier libro de Física General. Por ejemplo:

1. M. Alonso, E. J. Finn, *Física*, Ed. Addison Wesley Iberoamericana (1995).
2. R. A. Serway y J. W. Jewett, *Física para ciencias e ingeniería*, Volumen 1, Ed. Cengage Learning (2008).

**Tabla 1.** Anotaciones de la desviación y la frecuencia de rotación  
 Precisiones: regla  $\pm$  (m); tacómetro  $\pm$  ( $\text{min}^{-1}$ )

$\Delta y \pm$ ( $10^{-2}$ m)	rpm $\pm$ ( $\text{min}^{-1}$ )	$\omega \pm$ (rad/s)	$\omega r_0^2 \pm$ ( $\text{m}^2/\text{s}$ )	
1				
2				
3				
4				
5				

## Apéndice A (no es obligatorio)

### Ecuaciones completas para la aceleración de Coriolis

Dada la expresión (1) de la aceleración de Coriolis (véase también la Fig. 1):

$$\mathbf{a}' = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0) - 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (\text{A1})$$

usaremos las componentes del vector de posición  $\mathbf{r}(t)$  escritas de la siguiente forma  $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ , de modo que bastará derivar con respecto al tiempo esta expresión para obtener los vectores velocidad y aceleración. Por tanto tendremos las siguientes expresiones:

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]; \quad \mathbf{v}' = \left[ \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right]; \quad \mathbf{a}' = \left[ \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \frac{d^2z(t)}{dt^2} \right]; \quad (\text{A2})$$
$$\mathbf{g} = [0, 0, -g]; \quad \boldsymbol{\omega} = [0, 0, \omega].$$

donde se han añadido los vectores constantes  $\mathbf{g}$  y  $\boldsymbol{\omega}$  (la disminución de  $\omega$  por el rozamiento no se considera por ser muy lenta). Entonces la relación (A1) da lugar a las tres ecuaciones diferenciales lineales siguientes:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \omega^2 x(t) + 2\omega \frac{dy(t)}{dt}$$
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -2\omega \frac{dx(t)}{dt} \quad (\text{A3})$$
$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} = -g$$

Dada la forma en que se realizan las medidas en esta práctica, las condiciones iniciales que hay que añadir a las ecuaciones anteriores son:

$$\mathbf{r}(0) = [r_0, 0, 0] \quad (r_0, \text{radio de giro de la boquilla})$$
$$\left[ \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right]_{t=0} = [-v_0, 0, 0] \quad (v_0, \text{velocidad de salida del agua}) \quad (\text{A4})$$

La solución de (A3) con las condiciones (A4) resulta ser:

$$x(t) = \frac{r_0}{3} \left[ 4 - \cos(\sqrt{3}\omega t) + \frac{\sqrt{3}v_0}{\omega r_0} \text{sen}(\sqrt{3}\omega t) \right]$$
$$y(t) = -\frac{2}{3\omega} \left[ v_0 + r_0\omega^2 t - v_0 \cos(\sqrt{3}\omega t) - \frac{1}{\sqrt{3}}\omega r_0 \text{sen}(\sqrt{3}\omega t) \right] \quad (\text{A5})$$
$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$



### **Re-análisis de los resultados.**

Al utilizar las ecuaciones completas (A5), el tiempo de llegada del chorro a  $x(t) = 0$  no es constante sino que aumenta poco a poco con  $\omega_k$ . Al tener en cuenta este hecho, junto con la inclusión de la fuerza centrífuga que se despreció en (2), se debe obtener un ajuste de los datos más realista. Aunque, desgraciadamente, el tratamiento de los resultados experimentales utilizando las ecuaciones completas (A5) no se puede hacer de modo analítico en general y es necesario el cálculo numérico.

Un tipo de comprobación es calcular el desplazamiento  $y(t_k)$  correspondiente al tiempo  $t_k$  que tarda el agua en llegar a la posición  $x(t_k) = 0$  para las distintas frecuencias  $\omega_k$  y comparar con los experimentales  $y_{k,\text{exp}}$ . Para ello se usan el valor medido de la velocidad  $v_0$  obtenido a partir del caudal y las (A5), La obtención de  $t_k$  a partir de la ecuación  $x(t_k) = 0$  debe hacerse numéricamente.

Otro tipo de comprobación consiste en determinar  $v_0$  a partir de los valores experimentales  $y_{k,\text{exp}}$  para comparar con la velocidad medida a partir del caudal. Para ello, utilizando un valor inicial de prueba para  $v_0$ , se calculan numéricamente los valores  $y(t_k)$  como se describe en el párrafo anterior, así como la suma de las diferencias con los valores experimentales,  $[y(t_k) - y_{k,\text{exp}}]^2$ . Entonces, utilizando una subrutina de minimización, se varía el valor de  $v_0$  hasta que se haga mínima la suma anterior.